



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

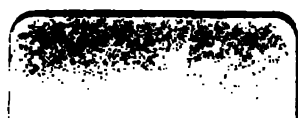
- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>



3 3433 06630794 7



OE A
FRANCE
Ecol

ANNALES

SCIENTIFIQUES

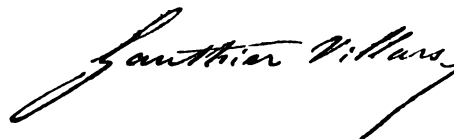
DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

L'Éditeur de cet Ouvrage se réserve le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes langues. Il poursuivra, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toutes contrefaçons soit du texte, soit des gravures, ou toutes traductions faites au mépris de ses droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage a été fait à Paris dans le cours de 1870, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature de l'Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.



ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,

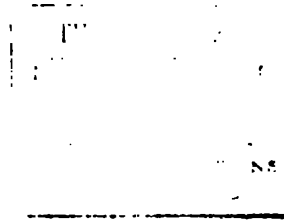
PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES
DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE,
PAR M. L. PASTEUR,
MEMBRE DE L'INSTITUT,
AVEC
UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAÎTRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE.

TOME SEPTIÈME — ANNÉE 1870.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1870
(L'Éditeur de cet Ouvrage se réserve le droit de traduction.)

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY



XXOY WIM
21001
00.000

COMITÉ DE RÉDACTION.

M. PASTEUR, *Président.*

MM.

MATHÉMATIQUES.....	{	BRIOT,
		HERMITE,
		PUISEUX.

PHYSIQUE..... BERTIN.

CHIMIE..... H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE.

	{	DELESSE,
HISTOIRE NATURELLE.....		DES CLOIZEAUX,
		LACAZE-DUTHIERS,
		VAN TIEGHEM.



ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

INTÉGRATION
DES ÉQUATIONS SIMULTANÉES

AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DU PREMIER ORDRE D'UNE SEULE FONCTION,

PAR M. COLLET,

DOCTEUR ÈS SCIENCES.

Le problème de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre a été résolu généralement par Cauchy (*) et Jacobi. Ce dernier, considérant d'abord la question proposée comme un cas particulier du problème de Pfaff (**), lui a appliqué la méthode de résolution relative à ce dernier problème, en démontrant toutefois qu'il suffit alors d'intégrer le premier des n systèmes d'équations qui se présentent dans le cas général (***). Plus tard, Jacobi a donné, d'abord pour le cas de quatre variables (****), puis ensuite pour le cas

(*) CAUCHY, *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. II.

(**) PFAFF, *Mémoires de Berlin*, 1814. — JACOBI, *Journal de Crelle*, t. II.

(***) JACOBI, *Journal de Crelle*, t. XVII.

(****) *Vorlesungen für Dynamik*.

général (*), une méthode qui se prête facilement à l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une même fonction, problème qui se présente dans différentes théories mathématiques, en particulier dans la recherche des intégrales intermédiaires des équations aux dérivées partielles du second ordre (**) et dans la recherche du facteur intégrant des expressions différentielles du premier ordre. Il y a plus, la méthode même de Jacobi, pour l'intégration d'une seule équation, exige la considération de systèmes successifs d'équations linéaires aux dérivées partielles, et dont il faut trouver une solution commune. Cette solution s'obtient, eu égard à la forme des équations, en appliquant un théorème de Jacobi qui est l'analogue de celui établi par Bour dans son *Mémoire sur l'intégration des équations de la Dynamique* (***), où il l'emploie pour la simplification du problème, au moyen des solutions particulières antérieurement déterminées. On peut d'ailleurs étendre à des équations homogènes quelconques, satisfaisant toutefois aux conditions d'intégrabilité, la méthode de Jacobi relative aux systèmes auxiliaires, en dirigeant les calculs de façon à obtenir la solution complète du système considéré : c'est ce qu'a fait Boole (****) qui, abordant directement la question, est arrivé à des résultats conformes à ceux qui résultent de la méthode de Jacobi. Quant au problème de l'intégration des équations simultanées quelconques, il a été considéré pour la première fois par Bour dans son *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles*.

(*) *Nova methodus pro integratione*.... (*Journal de Crelle*, t. LX).

(**) AMPÈRE, *Mémoire sur l'intégration* (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XI et XII).

(***) BOUR, *Mémoires des Savants étrangers*, 1856.

(****) G. BOOLE, *Philosophical transactions*, 1863.

§ I. — Énoncé du problème.

Le problème que nous nous proposons de résoudre est le suivant :

Étant données les relations

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \dots, \quad f_m = 0$$

entre une fonction V, les variables q_1, q_2, \dots, q_n dont elle dépend et les dérivées de V par rapport à ces mêmes variables, trouver l'expression de V en fonction de q_1, q_2, \dots, q_n qui satisfait aux équations proposées.

Nous supposerons toujours, dans la suite, que les équations proposées ne renferment pas la fonction cherchée; dans le cas contraire, on la ferait disparaître par un changement de variable, en posant

$$U = tV, \quad \text{d'où} \quad \frac{dU}{dq_i} = t \frac{dV}{dq_i}, \quad \frac{dU}{dt} = V,$$

U étant la nouvelle fonction cherchée et t une nouvelle variable indépendante.

Si nous considérons maintenant que les valeurs des dérivées partielles p_1, p_2, \dots, p_n de la fonction V, prises respectivement par rapport à q_1, q_2, \dots, q_n , tout en satisfaisant aux équations proposées, devront aussi être telles que l'expression $p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \dots + p_n dq_n$ soit la différentielle totale dV , nous en concluons que le problème proposé peut encore s'énoncer comme il suit :

Étant données m relations

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \dots, \quad f_m = 0$$

entre les variables q_1, q_2, \dots, q_n et les dérivées partielles correspondantes p_1, p_2, \dots, p_n de la fonction V, trouver entre les mêmes quantités $n - m$ autres relations qui, jointes aux premières, permettent de déterminer pour p_1, p_2, \dots, p_n des valeurs en fonction de q_1, q_2, \dots, q_n qui rendent l'expression $p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n$ une différentielle exacte. La fonction V sera donnée par l'intégration de cette expression.

La méthode que nous allons exposer pour le cas de m équations comprend le cas particulier de l'intégration d'une seule équation.

§ II. — *Des relations qui expriment que $p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n$ est une différentielle exacte.*

L'expression $p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n$ sera une différentielle exacte si, pour deux quelconques p_i et p_k des quantités p_1, p_2, \dots, p_n , on a la relation

$$(1) \quad \left(\frac{dp_k}{dq_i} \right) = \left(\frac{dp_i}{dq_k} \right),$$

les parenthèses indiquant des dérivées totales.

Supposons que p_i et p_k soient exprimés en fonction de q_1, q_2, \dots, q_n et d'un certain nombre des quantités p_1, p_2, \dots, p_n ; soient p_λ, p_μ, \dots celles de ces dernières quantités qui entrent dans p_i ou p_k : la condition (1) devient alors, en développant,

$$\frac{dp_k}{dq_i} + \frac{dp_k}{dp_\lambda} \left(\frac{dp_\lambda}{dq_i} \right) + \frac{dp_k}{dp_\mu} \left(\frac{dp_\mu}{dq_i} \right) + \dots = \frac{dp_i}{dq_k} + \frac{dp_i}{dp_\lambda} \left(\frac{dp_\lambda}{dq_k} \right) + \frac{dp_i}{dp_\mu} \left(\frac{dp_\mu}{dq_k} \right) + \dots,$$

ou bien, au moyen des conditions analogues à la précédente (1),

$$(2) \quad \frac{dp_k}{dq_i} + \frac{dp_k}{dp_\lambda} \left(\frac{dp_i}{dq_\lambda} \right) + \frac{dp_k}{dp_\mu} \left(\frac{dp_i}{dq_\mu} \right) + \dots = \frac{dp_i}{dq_k} + \frac{dp_i}{dp_\lambda} \left(\frac{dp_k}{dq_\lambda} \right) + \frac{dp_i}{dp_\mu} \left(\frac{dp_k}{dq_\mu} \right) + \dots$$

Nous allons maintenant prouver que, dans cette égalité, ainsi que dans toutes ses analogues, on peut remplacer les dérivées totales qui y entrent par les dérivées partielles correspondantes.

On a, en effet, d'une manière générale,

$$(3) \quad \left(\frac{dp_m}{dq_{\alpha'}} \right) = \frac{dp_m}{dq_{\alpha'}} + \sum_{\alpha} \frac{dp_m}{dp_{\alpha}} \left(\frac{dp_{\alpha}}{dq_{\alpha'}} \right),$$

où α doit prendre successivement les valeurs des indices des quantités p qui entrent dans l'expression de p_m ; si $m = i$ ou k , α prend successivement les valeurs λ, μ, \dots . Au moyen de la formule (3), où m prend des valeurs convenables, l'égalité (2) devient la suivante :

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{dp_k}{dq_i} + \sum_{\alpha'} \frac{dp_k}{dp_{\alpha'}} \frac{dp_i}{dq_{\alpha'}} + \sum_{\alpha'} \frac{dp_k}{dp_{\alpha'}} \sum_{\alpha} \frac{dp_i}{dp_{\alpha}} \left(\frac{dp_{\alpha}}{dq_{\alpha'}} \right) \\ & = \frac{dp_i}{dq_k} + \sum_{\alpha'} \frac{dp_i}{dp_{\alpha'}} \frac{dp_k}{dq_{\alpha'}} + \sum_{\alpha'} \frac{dp_i}{dp_{\alpha'}} \sum_{\alpha} \frac{dp_k}{dp_{\alpha}} \left(\frac{dp_{\alpha}}{dq_{\alpha'}} \right), \end{aligned} \right.$$

où α' , comme α , doit prendre toutes les valeurs λ, μ, \dots . Si alors on réunit dans un même membre les deux sommes doubles en permutant les indices α et α' de l'une d'elles, on aura l'expression suivante :

$$\sum_{\alpha'} \sum_{\alpha} \frac{dp_k}{dp_{\alpha}} \frac{dp_i}{dp_{\alpha'}} \left[\left(\frac{dp_{\alpha}}{dq_{\alpha'}} \right) - \left(\frac{dp_{\alpha'}}{dq_{\alpha}} \right) \right],$$

qui est identiquement nulle; donc l'égalité (4) se réduit à la suivante :

$$(5) \quad \frac{dp_k}{dq_i} - \frac{dp_i}{dq_k} + \sum_{\alpha} \left(\frac{dp_k}{dp_{\alpha}} \frac{dp_i}{dq_{\alpha}} - \frac{dp_i}{dp_{\alpha}} \frac{dp_k}{dq_{\alpha}} \right) = 0.$$

Pour établir cette formule, on n'a pas explicitement supposé que l'expression de p_k renfermât p_i , ni que celle de p_i pût contenir p_k ; mais il est clair que les raisonnements précédents subsistent complètement dans cette hypothèse, et, par suite, que la formule (5) est encore applicable. Dans le développement de cette formule, il ne faut pas oublier que les valeurs successives que prend α sont celles des indices des différentes variables p entrant explicitement dans p_i ou p_k , et que les valeurs de α répondant à p_i ne sont pas nécessairement les mêmes que celles qui sont relatives à p_k ; d'où il résulte que α ne doit pas prendre la valeur k dans la somme $\sum_{\alpha} \frac{dp_k}{dp_{\alpha}} \frac{dp_i}{dq_{\alpha}}$, et qu'il ne doit pas prendre la valeur i dans l'autre somme $\sum_{\alpha} \frac{dp_i}{dp_{\alpha}} \frac{dp_k}{dq_{\alpha}}$. La formule (5) développée sera donc

$$(6) \quad \frac{dp_k}{dq_i} + \frac{dp_k}{dp_i} \frac{dp_i}{dq_i} + \frac{dp_k}{dp_{\lambda}} \frac{dp_i}{dq_{\lambda}} + \dots - \frac{dp_i}{dq_k} - \frac{dp_i}{dp_k} \frac{dp_k}{dq_k} - \frac{dp_i}{dp_{\lambda}} \frac{dp_k}{dq_{\lambda}} - \dots = 0;$$

et si p_k contient p_i sans que p_i contienne p_k , on aura alors plus simplement

$$(7) \quad \frac{dp_k}{dq_i} + \frac{dp_k}{dp_i} \frac{dp_i}{dq_i} + \frac{dp_k}{dp_{\lambda}} \frac{dp_i}{dq_{\lambda}} + \dots - \frac{dp_i}{dq_k} - \frac{dp_i}{dp_{\lambda}} \frac{dp_k}{dq_{\lambda}} - \dots = 0.$$

En somme, il résulte de ce qui précède que les relations (5) devront être satisfaites par les valeurs de p_i et de p_k , quelle que soit la forme sous laquelle elles se présentent : que ces valeurs soient déduites des équations proposées, et alors les relations (5) donnent naissance à des conditions qui doivent être satisfaites par les équations proposées; ou bien qu'elles soient fournies par l'intégration, et alors les équations

considérées pourront précisément servir à la détermination de p_i , si, par exemple, p_k est supposé connu. En un mot, les formules dont la relation (5) est le type sont la base de toute la théorie de l'intégration des équations aux dérivées partielles simultanées du premier ordre.

La formule (5) peut revêtir d'autres formes dont la considération est nécessaire pour ce qui suit.

Pour les obtenir, supposons d'abord que p_i soit fourni par une équation de la forme suivante :

$$f_i(p_i, p_k, p_\lambda, \dots, q_1, q_2, \dots, q_n) = a_i,$$

a_i étant une constante déterminée ou arbitraire, et p_k pouvant entrer dans la fonction f_i ; p_k sera, d'après cela, une fonction de p_λ, p_μ, \dots , en même temps que des variables q_1, q_2, \dots, q_n . En dérivant les deux membres de l'égalité précédente successivement par rapport à q_m et à p_m , on déduira des équations obtenues les valeurs suivantes :

$$\frac{dp_i}{dq_m} = -\frac{\frac{df_i}{dq_m}}{\frac{df_i}{dp_i}}, \quad \frac{dp_i}{dp_m} = -\frac{\frac{df_i}{dp_m}}{\frac{df_i}{dp_i}},$$

et, si nous substituons ces valeurs dans la formule (5), en donnant à m des valeurs convenables, on en obtiendra la formule

$$(8) \quad \frac{df_i}{dq_k} + \sum_a \left(\frac{dp_k}{dq_a} \frac{df_i}{dp_a} - \frac{dp_k}{dp_a} \frac{df_i}{dq_a} \right) = 0,$$

qui est équivalente à la précédente (5), et qui, par conséquent, peut la remplacer pour l'intégration. Les remarques énoncées précédemment au sujet des valeurs successives de α sont d'ailleurs applicables dans le cas actuel, aussi bien que dans le cas précédent.

Si nous supposons maintenant que p_k soit donné à son tour par une équation telle que $f_k = a_k$, on pourra, par un calcul analogue au précédent, transformer la formule (8) et lui donner la forme suivante :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{df_i}{dq_k} \frac{df_k}{dp_k} + \frac{df_i}{dq_i} \frac{df_k}{dp_i} + \frac{df_i}{dq_\lambda} \frac{df_k}{dp_\lambda} + \frac{df_i}{dq_\mu} \frac{df_k}{dp_\mu} + \dots \\ - \frac{df_k}{dq_k} \frac{df_i}{dp_k} - \frac{df_k}{dq_i} \frac{df_i}{dp_i} - \frac{df_k}{dq_\lambda} \frac{df_i}{dp_\lambda} - \frac{df_k}{dq_\mu} \frac{df_i}{dp_\mu} - \dots = 0. \end{array} \right.$$

Si nous posons

$$(10) \quad (f_i f_k) = \sum_{\alpha} \left(\frac{df_i}{dq_{\alpha}} \frac{df_k}{dp_{\alpha}} - \frac{df_k}{dq_{\alpha}} \frac{df_i}{dp_{\alpha}} \right),$$

l'équation (9) s'écrira simplement

$$(11) \quad (f_i f_k) = 0.$$

Telle est la troisième forme des relations déduites de la condition que l'expression $p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n$ soit une différentielle exacte.

La formule (11) pouvait être établie directement en démontrant que, si l'expression $p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \dots + p_n dq_n$ est une différentielle exacte, deux quelconques, f_i, f_k , des fonctions qui sont les premiers membres des équations, d'où les valeurs des p_1, p_2, \dots, p_n sont déduites, satisfont à la condition $(f_i f_k) = 0$.

Soient les deux équations $f_i = a_i, f_k = a_k$; si on les dérive par rapport à q_{α} , qu'on retranche les résultats après les avoir multipliés respectivement par $\frac{df_k}{dp_{\alpha}}, \frac{df_i}{dp_{\alpha}}$, et enfin qu'on prenne la somme des résultats obtenus en donnant à α les valeurs $1, 2, 3, \dots, n$, on aura l'égalité suivante :

$$\sum_{\alpha} \left(\frac{df_i}{dq_{\alpha}} \frac{df_k}{dp_{\alpha}} - \frac{df_k}{dq_{\alpha}} \frac{df_i}{dp_{\alpha}} \right) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left[\frac{df_i}{dp_{\alpha}} \frac{df_k}{dp_{\beta}} \left(\frac{dp_{\beta}}{dq_{\alpha}} \right) - \frac{df_k}{dp_{\alpha}} \frac{df_i}{dp_{\beta}} \left(\frac{dp_{\beta}}{dq_{\alpha}} \right) \right],$$

où β , comme α , doit prendre successivement toutes les valeurs $1, 2, \dots, n$. Mais si, dans la deuxième partie du second membre, nous permutons les indices α et β , ce second membre pourra s'écrire

$$\sum_{\alpha} \sum_{\beta} \frac{df_i}{dp_{\alpha}} \frac{df_k}{dp_{\beta}} \left[\left(\frac{dp_{\beta}}{dq_{\alpha}} \right) - \left(\frac{dp_{\alpha}}{dq_{\beta}} \right) \right],$$

et cette quantité sera identiquement nulle si l'expression

$$p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n$$

est une différentielle exacte. Dans ce cas, les fonctions f_i, f_k doivent donc, ainsi que nous l'avons annoncé, satisfaire à la condition

$$\sum_{\alpha} \left(\frac{df_i}{dq_{\alpha}} \frac{df_k}{dp_{\alpha}} - \frac{df_k}{dq_{\alpha}} \frac{df_i}{dp_{\alpha}} \right) = 0.$$

Dans les raisonnements précédents, on a supposé que la fonction cherchée V n'entrait pas dans les fonctions f_i, f_k ; si le contraire avait lieu, on serait conduit, par un calcul analogue, à des conditions dont la formule est la suivante :

$$(11 \text{ bis}) \quad \sum_a \left[\left(\frac{df_i}{dq_a} + p_a \frac{df_i}{dV} \right) \frac{df_k}{dp_a} - \left(\frac{df_k}{dq_i} + p_i \frac{df_k}{dV} \right) \frac{df_i}{dp_a} \right] = 0.$$

Partant de là, on pourrait, en raisonnant comme nous le ferons avec les relations (8) et (11), composer une méthode complète d'intégration où l'on ne supposerait pas que la fonction cherchée fût absente des équations proposées. Nous nous bornerons à cette simple indication et reviendrons immédiatement à la question, telle que nous l'avons posée.

De tout ce qui précède, il résulte que, *si le système des n équations distinctes,*

$$(\alpha) \quad f_1 = a_1, \dots, f_i = a_i, \dots, f_k = a_k, \dots, f_n = a_n,$$

où a_1, \dots, a_n sont des constantes déterminées ou arbitraires, est tel que les valeurs de p_1, p_2, \dots, p_n qu'on en déduit rendent l'expression

$$(\beta) \quad p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n$$

une différentielle exacte, les relations (5), (8), (11) seront satisfaites pour toutes les valeurs des indices i et k .

La réciproque de cette proposition est vraie, c'est-à-dire que, *si les relations (5), ou (8), ou (11) sont satisfaites en vertu des équations (α), l'expression (β) sera une différentielle exacte quand on y remplacera p_1, \dots, p_n par les valeurs déduites des équations (α).*

Démontrons cette réciproque pour les relations (11) en particulier, et supposons, en conséquence, que, pour deux quelconques, f_i, f_k , des fonctions f_1, f_2, \dots, f_n , on ait

$$(f_i f_k) = \sum_a \left(\frac{df_i}{dq_a} \frac{df_k}{dp_a} - \frac{df_k}{dq_i} \frac{df_i}{dp_a} \right) = 0;$$

il faut prouver que l'on a aussi

$$\left(\frac{dp_k}{dq_i} \right) = \left(\frac{dp_i}{dq_k} \right).$$

En effet, d'après ce qui précède, nous avons

$$(f_i f_k) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \frac{df_i}{dp_{\alpha}} \frac{df_k}{dp_{\beta}} \left[\left(\frac{dp_{\beta}}{dq_{\alpha}} \right) - \left(\frac{dp_{\alpha}}{dq_{\beta}} \right) \right],$$

ce qui peut encore s'écrire, en explicitant tous les termes répondant à une combinaison α, β , des nombres $1, 2, \dots, n$,

$$(12) \quad (f_i f_k) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(\frac{df_i}{dp_{\alpha}} \frac{df_k}{dp_{\beta}} - \frac{df_k}{dp_{\alpha}} \frac{df_i}{dp_{\beta}} \right) \left[\left(\frac{dp_{\beta}}{dq_{\alpha}} \right) - \left(\frac{dp_{\alpha}}{dq_{\beta}} \right) \right].$$

Dans le second membre de cette égalité, nous avons $\frac{n(n-1)}{2}$ termes; d'ailleurs, en attribuant à i et k toutes les valeurs qui donnent des résultats distincts, nous aurons aussi $\frac{n(n-1)}{2}$ équations qui permettront de déterminer les valeurs des quantités telles que la suivante :

$$(13) \quad \left(\frac{dp_{\beta}}{dq_{\alpha}} \right) = \left(\frac{dp_{\alpha}}{dq_{\beta}} \right),$$

en fonction des expressions α analogues à $(f_i f_k)$. Je dis que *ces équations donneront pour les quantités cherchées (13) des valeurs déterminées qui seront des fonctions linéaires et homogènes des expressions telles que $(f_i f_k)$.*

Il suffit de montrer, pour cela, que le déterminant des équations (12) n'est pas nul; et je dis, d'ailleurs, qu'il n'est pas autre que le suivant :

$$\Delta = \sum \left(\pm \frac{df_1}{dp_1} \dots \frac{df_n}{dp_n} \right),$$

que l'on sait être différent de zéro, si les fonctions f_1, f_2, \dots, f_n sont distinctes, comme on le suppose (*).

Cherchons, en effet, la valeur de la quantité (13) fournie par les équations (12); et, dans ce but, ordonnons le déterminant Δ suivant les produits des termes des lignes horizontales dont les rangs sont indiqués par les indices k et i : on aura

$$\Delta = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(\frac{df_i}{dp_{\alpha}} \frac{df_i}{dp_{\beta}} - \frac{df_i}{dp_{\alpha}} \frac{df_k}{dp_{\beta}} \right) \partial_{\alpha\beta}^{k,i},$$

(*) JACOBI, *De determinantibus functionalibus*.

en désignant par $\partial_{\alpha,\beta}^{k,i}$ le déterminant mineur résultant du proposé par la suppression des colonnes verticales dont les rangs sont indiqués par les indices inférieurs α et β , et par la suppression des lignes horizontales de rangs k et i . Multipliant maintenant les deux membres de l'équation (12) par $\partial_{\alpha,\beta}^{k,i}$, et ajoutant membre à membre les équations obtenues en donnant à i et k les valeurs répondant aux diverses combinaisons des nombres de la suite $1, 2, \dots, n$ pris deux à deux, si l'on remarque que l'on a identiquement

$$\sum_k \sum_i \left(\frac{df_k}{dp_{\alpha'}} \frac{df_i}{dp_{\beta'}} - \frac{df_i}{dp_{\alpha'}} \frac{df_k}{dp_{\beta'}} \right) \partial_{\alpha,\beta}^{k,i} = 0,$$

on aura pour résultat

$$\Delta \left[\left(\frac{dp_\beta}{dq_\alpha} \right) - \left(\frac{dp_\alpha}{dq_\beta} \right) \right] = \sum_k \sum_i \partial_{\alpha,\beta}^{k,i} (f_i f_k),$$

ce qui démontre ce que nous avons avancé. Par conséquent, si les fonctions f_1, f_2, \dots, f_n sont telles que, pour deux quelconques d'entre elles, f_i, f_k , on ait la condition satisfaite $(f_i f_k) = 0$, comme Δ est nécessairement différent de zéro par hypothèse, nous en concluons que

$$\left(\frac{dp_\beta}{dq_\alpha} \right) - \left(\frac{dp_\alpha}{dq_\beta} \right) = 0,$$

et, par conséquent, que l'expression $p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n$ est une différentielle exacte, ce qui démontre la proposition énoncée.

Remarque I. — Dans ce qui précède, on pourrait remplacer les équations

$$(14) \quad f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2, \dots, \quad f_n = a_n$$

par n autres équations équivalentes aux précédentes, et qu'on en déduirait en les combinant entre elles d'une manière quelconque. Soient

$$(15) \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \dots, \quad F_n = 0,$$

ces nouvelles équations dont les premiers membres contiennent une ou plusieurs constantes a_1, a_2, \dots, a_n . Il est évident que, si les con-

stantes sont réellement considérées comme telles, deux quelconques, F_i, F_k , des fonctions F_1, F_2, \dots, F_n satisferont encore à la condition

$$(16) \quad (F_i F_k) = 0;$$

il y a plus, en prenant une fonction dans chacun des systèmes (14) et (15), je dis qu'on aura aussi

$$(17) \quad (F_i f_k) = 0;$$

car, de deux choses l'une : ou bien les équations $F_i = 0$ et $f_k - a_k = 0$ sont distinctes, ou bien elles rentrent l'une dans l'autre. Dans le premier cas, la relation (17) est évidente; dans le second, elle ne l'est pas moins, puisque, F_i étant alors une fonction de $f_k - a_k$, on a

$$(F_i f_k) = \frac{dF_i}{df_k} (f_k f_k),$$

et que le second membre de cette égalité est identiquement nul.

Je dis maintenant que les relations (16) et (17) ont encore lieu quand on considère les constantes comme des fonctions définies par les équations (14).

Si, en effet, nous enfermons entre crochets les expressions dans lesquelles cette hypothèse est introduite, on aura, d'après un théorème connu,

$$[(F_i F_k)] = (F_i F_k) + \sum_a [(F_i f_a)] \frac{dF_k}{da_a} + \sum_b [(f_b F_k)] \frac{dF_i}{da_b} + \sum_a \sum_b (f_b f_a) \frac{dF_i}{da_b} \frac{dF_k}{da_a}.$$

Mais, d'après le même théorème, on a aussi

$$[(F_i f_a)] = (F_i f_a) + \sum_r (f_r f_a) \frac{dF_i}{da_r};$$

donc, enfin, on a bien, en vertu des conditions (11), (16), (17),

$$[(F_i F_k)] = 0.$$

On verrait de même que l'on a aussi

$$[(F_i f_k)] = 0.$$

Remarque II. — Considérons deux fonctions quelconques φ et ψ renfermant n variables indépendantes q_1, \dots, q_n et les dérivées d'une fonc-

tion par rapport à ces mêmes variables, et proposons-nous de chercher ce que devient l'expression $(\varphi\psi)$ quand on change les variables données en un nombre égal d'autres x_1, x_2, \dots, x_n liées aux premières par des relations déterminées, quelconques d'ailleurs.

Soit u la fonction, p_1, p_2, \dots, p_n ses dérivées prises respectivement par rapport à q_1, q_2, \dots, q_n , et enfin v_1, v_2, \dots, v_n ses dérivées prises par rapport aux nouvelles variables x_1, x_2, \dots, x_n ; on aura, dans l'une ou l'autre hypothèse,

$$du = p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \dots + p_n dq_n,$$

et

$$du = v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + \dots + v_n dx_n.$$

Les seconds membres doivent devenir identiques quand on exprime les p et q en fonction des x_1, x_2, \dots, x_n , ou les v et x en fonction des q_1, q_2, \dots, q_n . Nous aurons ainsi

$$(18) \quad v_k = \sum_k p_k \frac{dq_k}{dx_k} \quad \text{et} \quad p_k = \sum_k v_k \frac{dx_k}{dq_k};$$

de même, en dérivant la fonction φ dans l'une ou l'autre hypothèse, on aura

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dq_i} &= \frac{d\varphi}{dx_1} \frac{dx_1}{dq_i} + \dots + \frac{d\varphi}{dx_n} \frac{dx_n}{dq_i} + \frac{d\varphi}{dv_1} \frac{dv_1}{dq_i} + \dots + \frac{d\varphi}{dv_n} \frac{dv_n}{dq_i}, \\ \frac{d\varphi}{dp_i} &= \frac{d\varphi}{dv_1} \frac{dv_1}{dp_i} + \dots + \frac{d\varphi}{dv_n} \frac{dv_n}{dp_i}. \end{aligned}$$

La fonction ψ donnerait des résultats analogues. On aura alors

$$\begin{aligned} (\varphi\psi) &= \sum_i \left(\frac{d\varphi}{dq_i} \frac{d\psi}{dp_i} - \frac{d\psi}{dq_i} \frac{d\varphi}{dp_i} \right) \\ &= \sum_i \sum_k \sum_{k'} \frac{dx_k}{dq_i} \frac{dv_{k'}}{dp_i} \left(\frac{d\varphi}{dx_k} \frac{d\psi}{dv_{k'}} - \frac{d\psi}{dx_k} \frac{d\varphi}{dv_{k'}} \right) \\ &\quad + \sum_i \sum_k \sum_{k'} \frac{dv_k}{dq_i} \frac{dv_{k'}}{dp_i} \left(\frac{d\varphi}{dv_k} \frac{d\psi}{dv_{k'}} - \frac{d\psi}{dv_k} \frac{d\varphi}{dv_{k'}} \right), \end{aligned}$$

cette dernière partie pouvant d'ailleurs s'écrire de la façon suivante :

$$\sum_i \sum_k \sum_{k'} \frac{d\varphi}{dv_k} \frac{d\psi}{dv_{k'}} \left(\frac{dv_k}{dq_i} \frac{dv_{k'}}{dp_i} - \frac{dv_{k'}}{dq_i} \frac{dv_k}{dp_i} \right).$$

Comme dans chacune des sommes triples précédentes, on peut commencer par les sommations relatives à l'indice i , nous nous proposerons d'abord de calculer les deux sommes suivantes :

$$\sum_i \frac{dx_k}{dq_i} \frac{dv_k}{dp_i} \quad \text{et} \quad \sum_i \left(\frac{dv_k}{dq_i} \frac{dv_k}{dp_i} - \frac{dv_k}{dq_i} \frac{dv_k}{dp_i} \right).$$

Pour la première, de l'identité

$$\sum_i p_i dq_i = \sum_k v_k dx_k,$$

on déduira la suivante :

$$dq_i = \sum_k \frac{dv_k}{dp_i} dx_k,$$

d'où l'on aura les équations

$$(19) \quad \sum_{k=1}^{k=n} \frac{dx_k}{dq_i} \frac{dv_k}{dp_i} = 0,$$

$$(20) \quad \sum_{k=1}^{k=n} \frac{dx_k}{dq_i} \frac{dv_k}{dp_i} = 1,$$

dont la première en donne $n - 1$, quand on attribue successivement à k les valeurs $1, 2, \dots, n$, i étant excepté. Nous obtenons donc ainsi un système de n équations, et nous aurons n systèmes semblables en donnant à i successivement les valeurs $1, 2, \dots, n$. Si l'on multiplie maintenant l'une quelconque des équations du système précédent par $\frac{dx_k}{dq_i}$, et qu'on fasse la somme des résultats obtenus en donnant à i les valeurs successives $1, 2, \dots, n$; si l'on opère de même pour toutes les équations du système précédent, et que l'on pose, en général,

$$\sum_i \frac{dx_k}{dq_i} \frac{dv_k}{dp_i} = K_k, \quad \text{et} \quad \sum_i \frac{dx_k}{dq_i} \frac{dv_k}{dp_i} = 1 + K_k,$$

on aura n équations qui seront données par la formule suivante :

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{dx_k}{dq_i} K_k = 0,$$

en attribuant à i successivement les valeurs $1, 2, \dots, n$. Comme le déterminant de ce système de n équations ne peut être nul, les fonctions x_1, x_2, \dots, x_n étant supposées distinctes, on en déduira

$$K_1 = 0, \quad K_2 = 0, \dots, \quad K_n = 0,$$

ou, en d'autres termes,

$$\sum_i \frac{dx_i}{dq_i} \frac{dv_{k'}}{dp_i} = 0, \quad \text{pour } k \geq k',$$

et

$$\sum_i \frac{dx_i}{dq_i} \frac{dv_k}{dp_i} = 1, \quad \text{pour } k = k'.$$

La première partie de l'expression $(\varphi\psi)$ transformée se réduira donc à la suivante :

$$\sum_k \left(\frac{d\varphi}{dx_k} \frac{d\psi}{dv_k} - \frac{d\psi}{dx_k} \frac{d\varphi}{dv_k} \right).$$

Occupons-nous maintenant de la seconde partie.

Si nous représentons par le symbole (k, k') la quantité $\sum_i \frac{dv_k}{dq_i} \frac{dv_{k'}}{dp_i}$, la quantité à calculer se représentera par l'expression $(kk') - (k'k)$. Le calcul de cette expression est basé sur la résolution du système de n équations que l'on obtient en donnant à h , dans la formule suivante,

$$(21) \quad \sum_{k=1}^{k=n} \frac{dx_k}{dq_k} u_k = M_h,$$

successivement les valeurs $1, 2, \dots, n$. La valeur de l'une des inconnues u_k sera de la forme

$$u_k = \sum_{h=1}^{h=n} C_{kh} M_h,$$

les quantités telles que C_{kh} pouvant d'ailleurs se déterminer immédiatement par cette simple remarque, que le système (21) deviendrait identique au système fourni par les formules (19) et (20) si toutes les quantités M_h s'annulaient, à l'exception de M_i qui devrait alors devenir

égal à l'unité; d'où il résulte que $C_{hh} = \frac{dv_h}{dp_i}$, et, par suite, que l'on a

$$(22) \quad u_k = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{dv_h}{dp_k} M_h.$$

Ceci posé, si nous considérons les valeurs de p_h et de p_i données par la formule (18), en les différentiant respectivement par rapport à q_i et q_h , puis égalant leurs valeurs, on aura l'équation

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{dx_k}{dq_h} \frac{dv_k}{dq_i} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{dx_k}{dq_i} \frac{dv_k}{dq_h},$$

qui en donne n quand on attribue à h successivement les valeurs 1, 2, ..., n . Si nous posons, en général,

$$M_h = \sum_k \frac{dx_k}{dq_i} \frac{dv_k}{dq_h},$$

on obtiendra un système analogue au système (21), et qui se résoudra, par conséquent, par l'application de la formule (22). On obtiendra ainsi, pour une valeur quelconque de h ,

$$\frac{dv_k}{dq_i} = \sum_{k'} \frac{dx_{k'}}{dq_i} (k, k');$$

et, comme en donnant à i successivement les valeurs 1, 2, ..., n , on obtient encore un système analogue au système (21), on en déduira, par une nouvelle application de la formule (22), $(kk') = (k'k)$; donc la seconde partie de l'expression $(\varphi\psi)$ est identiquement nulle, et, par suite, nous pouvons conclure que, par le changement des variables q_1, q_2, \dots, q_n dans les suivantes x_1, x_2, \dots, x_n , l'expression

$$(\varphi\psi) = \sum_i \left(\frac{d\varphi}{dq_i} \frac{d\psi}{dp_i} - \frac{d\psi}{dq_i} \frac{d\varphi}{dp_i} \right)$$

se change dans la suivante :

$$(\varphi\psi)' = \sum_k \left(\frac{d\varphi}{dx_k} \frac{d\psi}{dv_k} - \frac{d\psi}{dx_k} \frac{d\varphi}{dv_k} \right),$$

qui a exactement la même forme que la première.

§ III. — *Des conditions que doivent satisfaire les équations proposées pour admettre une solution commune.*

Soit proposé d'intégrer le système suivant de m équations :

$$(23) \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \dots, \quad f_m = 0,$$

f_1, f_2, \dots, f_m désignant des fonctions quelconques de $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n$; le problème ne sera possible qu'autant que les fonctions considérées satisferont à des conditions dont la détermination résulte de ce qui précède. On a, en effet, démontré que, si l'on détermine au moyen d'un système de n équations de la forme

$$f_i = a_i,$$

des valeurs des p_1, p_2, \dots, p_n qui rendent l'expression

$$p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n$$

une différentielle exacte, les fonctions f_1, f_2, \dots, f_n satisfont deux à deux à des conditions de la forme

$$(24) \quad (f_i f_k) = 0;$$

et, comme la réciproque de cette proposition a également été établie, nous sommes en droit de conclure, relativement aux équations (23), qu'il est nécessaire et suffisant, pour que le système considéré admette une solution commune, que deux quelconques des fonctions f_1, f_2, \dots, f_m satisfassent à la condition (24).

La formule (24) donne donc $\frac{m(m-1)}{2}$ conditions qui doivent être satisfaites soit identiquement, soit en vertu des équations données (23), soit enfin en établissant de nouvelles relations entre les quantités $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$. Ainsi donc, dans ce dernier cas, qui est celui où deux quelconques des fonctions données ne satisfont pas à la condition (24), il n'en faut pas conclure que le problème soit sans solution; mais, posant l'expression $(f_i f_k)$ égale à une nouvelle fonction f_h , on devra adjoindre l'équation $f_h = 0$ aux équations proposées (23), dont le

nombre sera ainsi augmenté d'une unité. Mais alors la fonction f_h devra aussi, pour que le problème proposé soit possible, satisfaire aux conditions (24), en lui adjoignant successivement les m fonctions f_1, f_2, \dots, f_m . Si, de nouveau, pour l'une de ces dernières en combinaison avec f_h , on n'a pas $(f_i f_h) = 0$, on opérera comme précédemment, en posant $(f_i f_h) = f_{h'}$, et joignant l'équation $f_{h'} = 0$ aux précédentes. On opérera ainsi successivement jusqu'à ce que l'on soit parvenu à un système d'équations distinctes $f_1 = 0, \dots, f_m = 0, \dots, f_{m'} = 0$, telles que, pour deux quelconques d'entre elles, la condition $(f_i f_h) = 0$ soit satisfaite. Alors, si $m' \leq n$, le problème proposé est possible, c'est-à-dire que les équations considérées admettent une solution commune; mais, si $m' > n$, le problème est impossible, car, en éliminant p_1, p_2, \dots, p_n entre les m' équations précédentes, on aurait pour résultat $m' - n$ relations entre les variables q_1, \dots, q_n , ce qui ne peut arriver, puisque ces variables sont supposées indépendantes. On voit donc que l'on pourra arrêter les calculs précédents quand on aura n équations, et si alors elles ne satisfont pas toutes aux conditions énoncées, le problème est réellement impossible.

Si maintenant on recherche la véritable signification de la marche que nous venons d'indiquer, on voit qu'elle consiste à établir à chaque condition non satisfaite une nouvelle relation finie, c'est-à-dire libre de toute constante ou fonction arbitraire, entre les quantités $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$, ce qui restreint la généralité du problème; et on restreint ainsi de proche en proche la généralité du problème proposé jusqu'à le rendre possible, si cela se peut. On peut donc dire que, *si les conditions (24) ne sont pas immédiatement satisfaites, soit identiquement, soit en vertu des équations proposées, le problème est impossible à résoudre dans la généralité avec laquelle il est posé; qu'il peut parfois admettre des solutions plus particulières, à la condition toutefois d'établir de nouvelles relations entre les variables, ce qui en diminue la généralité.*

Nous verrons d'ailleurs dans la suite que l'introduction d'une nouvelle équation diminue d'une unité le nombre des constantes arbitraires entrant dans la solution complète.

Quoi qu'il en soit, on voit donc que l'on ramène le problème, quand il est susceptible de solution, à un autre plus particulier dont les équations satisfont toutes aux conditions d'intégrabilité, et qui pourra

être résolu dans toute sa généralité : nous n'aurons donc, dans la suite, que ce dernier cas à considérer.

§ IV. — *Des systèmes auxiliaires; leur composition et leurs propriétés.*

Après avoir déterminé les conditions que doivent remplir les équations proposées pour qu'elles puissent admettre une solution commune, nous avons à chercher les nouvelles relations qui, jointes aux précédentes, permettent de déterminer pour p_1, p_2, \dots, p_n des valeurs en fonction de q_1, q_2, \dots, q_n telles, que l'expression $p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n$ soit une différentielle exacte. Le problème qu'on aura à résoudre pour la détermination de chacune des nouvelles relations en particulier pourra s'énoncer en général de la façon suivante :

Étant données entre les quantités $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ les relations suivantes :

$$(25) \quad f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2, \dots, \quad f_s = a_s,$$

qui satisfont aux conditions (24), trouver entre les mêmes quantités une nouvelle relation

$$f_{s+1} = a_{s+1},$$

qui satisfasse aussi à ces mêmes conditions.

Nous représentons par $a_1, a_2, \dots, a_s, a_{s+1}$ des constantes arbitraires, à l'exception des m premières, qui sont nulles; et, à propos de ces constantes, il importe de remarquer que ces nouvelles relations qui viennent s'adjoindre aux proposées conservent à la question toute sa généralité, eu égard à la constante arbitraire que chacune d'elles introduit dans le système des équations auxquelles elle vient se joindre.

Ceci posé, nous nous proposons de résoudre le problème que nous venons d'énoncer. La fonction cherchée f_{s+1} devra satisfaire à un système d'équations déduites des formules (8) ou (11), en donnant à k successivement les valeurs $1, 2, \dots, s$, et donnant à i la valeur $(s+1)$. On pourrait même se servir de la formule (5), et alors on se propose-

rait la détermination directe de p_{s+1} et non de f_{s+1} , ce qui, d'ailleurs, remplirait aussi bien le but que l'on se propose d'atteindre. Nous ferons actuellement usage de la formule (8), et pour cela nous supposons que des équations (25) on déduise pour p_1, p_2, \dots, p_s des valeurs en fonction de $p_{s+1}, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n$, et des constantes a_1, a_2, \dots, a_s ; quant aux équations auxquelles la fonction f_{s+1} devra satisfaire, elles seront comprises dans la formule suivante :

$$(26) \quad \frac{df_{s+1}}{dq_k} + \sum_{\alpha=s+1}^{n-1} \left(\frac{dp_k}{dq_\alpha} \frac{df_{s+1}}{dp_\alpha} - \frac{dp_\alpha}{dq_k} \frac{df_{s+1}}{dp_\alpha} \right) = 0,$$

où k prendra successivement les valeurs $1, 2, \dots, s$. Les équations ainsi obtenues auront une forme spéciale qui permettra d'en déterminer une solution commune. Chaque fonction cherchée devra donc satisfaire à un système d'équations simultanées, lequel système est dit *auxiliaire*, par opposition au système des équations proposées qui est dit *principal*. Si le système principal se compose de m équations satisfaisant aux conditions d'intégrabilité, n étant le nombre des variables, les systèmes auxiliaires seront au nombre de $n - m$, et se composeront successivement de $m + 1, m + 2, \dots, n$ équations; ils se déduiront du précédent (26), en donnant successivement à s les valeurs $m, m + 1, \dots, n - 1$. Tous ces systèmes s'intégreront de la même façon, à cause de leur forme semblable, que nous appellerons *canonique*; et la recherche d'une solution particulière commune aux équations de l'un de ces systèmes s'effectuera au moyen des théorèmes qui suivent.

THÉORÈME I. — Si $f_{s+1} = \varphi$ est une solution de l'une quelconque des équations du système (26), en remplaçant f_{s+1} par sa valeur φ dans une autre quelconque des équations du même système, si le résultat de la substitution n'est pas identiquement nul ou constant, il sera une nouvelle solution de la première équation considérée.

Ce théorème est compris dans un autre plus général, et dont l'énoncé suit :

THÉORÈME II. — Si φ et ψ sont deux fonctions de $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ assujetties à la condition que l'on ait $(\varphi, \psi) = 0$, et que l'on considère

les deux équations simultanées

$$(\varphi f) = 0, \quad (\psi f) = 0,$$

où f est la fonction cherchée; si $f = f_i$ est une solution de la première de ces équations, par exemple, l'expression (ψf_i) résultant de la substitution de f_i à f dans la seconde équation sera, si elle n'est identiquement nulle ou constante, une nouvelle solution de la première équation, solution qui peut d'ailleurs se réduire à une fonction de la précédente.

La démonstration des théorèmes qui précèdent est basée sur le lemme suivant :

LEMME. — Si f, φ, ψ désignent trois fonctions quelconques de $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$, on aura identiquement

$$(27) \quad (f(\varphi\psi)) + (\varphi(\psi f)) + (\psi(f\varphi)) = 0.$$

En effet, nous avons

$$(\varphi\psi) = \sum_k \left(\frac{d\varphi}{dq_k} \frac{d\psi}{dp_k} - \frac{d\psi}{dq_k} \frac{d\varphi}{dp_k} \right),$$

et des formules analogues pour (ψf) et $(f\varphi)$. L'indice h de la formule précédente étant remplacé successivement par i et k , on en déduira facilement l'égalité suivante :

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} (\varphi(\psi f)) = \sum_{i,k} \left[\frac{d\varphi}{dq_k} \left(\frac{d\psi}{dq_i} \frac{d^2 f}{dp_k dp_i} - \frac{d\psi}{dp_i} \frac{d^2 f}{dp_k dq_i} \right) - \frac{d\varphi}{dp_k} \left(\frac{d\psi}{dq_i} \frac{d^2 f}{dq_k dp_i} - \frac{d\psi}{dp_i} \frac{d^2 f}{dq_k dq_i} \right) \right. \\ \left. - \frac{d\varphi}{dq_k} \left(\frac{df}{dq_i} \frac{d^2 \psi}{dp_k dp_i} - \frac{df}{dp_i} \frac{d^2 \psi}{dp_k dq_i} \right) + \frac{d\varphi}{dp_k} \left(\frac{df}{dq_i} \frac{d^2 \psi}{dq_k dp_i} - \frac{df}{dp_i} \frac{d^2 \psi}{dq_k dq_i} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

On obtiendra les développements de $(\varphi(f\varphi))$ et de $(f(\varphi\psi))$ en remplaçant, dans la formule précédente, les lettres φ, ψ, f successivement par les suivantes ψ, f, φ , puis par f, φ, ψ , et les indices h, i par i, k , et ensuite par k, h . On peut alors démontrer l'identité (27) en faisant voir que tous les termes en $d^2 f$, par exemple, s'entre-détruisent. Pour arriver à cette conclusion, il suffit de remarquer que les expressions $(\varphi(\psi f))$ et $(\psi(f\varphi))$ renferment seules des termes de l'espèce considérée; que les termes en question entrant dans la première de ces deux expressions

sont les mêmes en valeur absolue que ceux qui entrent dans la seconde; et enfin que les signes de ces premiers termes sont respectivement contraires des signes des seconds. Cette dernière assertion résulte de cette remarque que, dans l'égalité (28), tout terme contenant une dérivée seconde de f est positif si les deux variables par rapport auxquelles on dérive sont de même espèce, négatif dans le cas contraire; et que l'inverse a lieu pour les termes en $d^2\varphi$: comme dans la seconde expression f prend la place qu'occupe ψ dans la première, ce que nous avons avancé se trouve pleinement justifié. Ce que nous avons dit pour les termes en d^2f pouvant se répéter pour les termes en $d^2\varphi$ et en $d^2\psi$, la proposition énoncée est donc complètement démontrée.

Le second théorème énoncé se déduit immédiatement du lemme qui précède. En effet, si, comme on le suppose, on a identiquement $(\varphi\psi)=0$, et que $f=f_i$ soit une solution de l'équation $(\varphi\psi)=0$, on aura aussi l'identité $(\varphi f_i)=0$; en conséquence, si dans la relation (27) on remplace f par f_i , on aura l'identité suivante :

$$(\varphi(\psi f_i))=0,$$

ce qui démontre bien que, dans le cas où l'expression (ψf_i) n'est pas identiquement nulle ou constante, elle est une solution de l'équation $(\varphi f)=0$, ainsi qu'on l'avait annoncé.

Nous allons actuellement démontrer le premier théorème. Posons, pour cela,

$$\varphi = \varphi_i - p_k, \quad \psi = \psi_i - p_i,$$

ψ_i et φ_i étant deux fonctions des quantités p_{s+1}, \dots, p_n et des variables q_1, \dots, q_n , et k, i deux nombres quelconques de la suite $1, \dots, s$, d'où il résulte que les fonctions ψ_i et φ_i ne contiennent ni p_i , ni k_i ; si en outre la fonction f ne contient aussi que les quantités $p_{s+1}, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$, ce qui est conforme au théorème en question, on aura, pour l'équation $(\varphi f)=0$ développée,

$$(29) \quad \frac{df}{dq_k} + \sum_{\alpha=s+1}^{\alpha=n} \left(\frac{d\varphi_i}{dq_\alpha} \frac{df}{dp_\alpha} - \frac{d\varphi_i}{dq_\alpha} \frac{df}{dq_\alpha} \right) = 0;$$

l'équation $(\psi f)=0$ conduira à une équation en ψ , analogue à la pré-

la place de f_{s+1} dans une autre équation du système, la seconde par exemple, le résultat de la substitution, s'il n'est pas nul ou constant, sera une nouvelle solution de la première équation; soit φ_2 ce résultat, on a

$$\varphi_2 = \frac{d\varphi_1}{dq_2} + \frac{dp_2}{dq_{s+1}} \frac{d\varphi_1}{dp_{s+1}} + \dots + \frac{dp_2}{dq_n} \frac{d\varphi_1}{dp_n} - \frac{dp_2}{dp_{s+1}} \frac{d\varphi_1}{dq_{s+1}} - \dots - \frac{dp_2}{dp_n} \frac{d\varphi_1}{dq_n}.$$

En opérant de nouveau avec φ_2 , comme on l'a fait avec φ_1 , ce qui revient à remplacer, dans l'égalité précédente, φ_1 par φ_2 , on aura pour résultat une nouvelle solution φ_3 de la première équation, à la condition toutefois que φ_3 ne soit pas nul ou constant. On continuera ainsi les substitutions successives jusqu'à ce que l'on arrive à un résultat ou nul, ou constant, ou fonction des résultats antérieurement obtenus, ainsi que des variables q_2, q_3, \dots, q_s , qui sont considérées comme constantes dans l'équation intégrée; et, à défaut des deux premières circonstances, la troisième se présentera toujours après un nombre limité d'opérations, puisque le nombre des solutions particulières distinctes de ladite équation est lui-même limité. Dans le cas d'un résultat nul, la fonction substituée est une solution commune des deux équations considérées; nous verrons bientôt l'usage que l'on ferait d'un résultat constant; enfin, dans le troisième cas, qui est en réalité le cas le plus général, si φ_μ est un résultat fonction des précédents $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{\mu-1}$ et des variables q_2, \dots, q_s , une fonction quelconque ϖ de $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{\mu-1}, q_2, \dots, q_s$ sera encore une solution de la première équation; nous nous proposerons de déterminer la forme de cette fonction de façon qu'elle soit aussi une solution de la seconde équation. La condition à satisfaire pour cela se trouvera en remplaçant f_{s+1} par ϖ dans la seconde équation du système (26), et qui donnera, en tenant compte des valeurs de $\varphi_1, \dots, \varphi_\mu$,

$$(31) \quad 0 = \frac{d\varpi}{dq_2} + \frac{d\varpi}{d\varphi_1} \varphi_2 + \frac{d\varpi}{d\varphi_2} \varphi_3 + \dots + \frac{d\varpi}{d\varphi_{\mu-1}} \varphi_\mu,$$

équation dans laquelle $q_2, \varphi_1, \dots, \varphi_{\mu-1}$ sont les variables, et φ_μ une fonction connue de ces variables. Soit $\varpi_1(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{\mu-1}, q_2)$ une solution de cette équation; en posant $f_{s+1} = \varpi_1$, on aura une solution commune des deux premières équations du système auxiliaire considéré, et il en sera de même d'une fonction quelconque de ϖ_1 , des autres solutions de

l'équation (31) et des variables q_3, \dots, q_s qui sont considérées comme constantes dans ces deux équations. Dans le cas que nous avons seulement indiqué, où la série des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ se termine à une constante, on obtiendrait une solution commune en opérant comme précédemment, φ_μ se trouvant remplacé par la constante en question; mais, dans ce cas, on peut arriver beaucoup plus simplement au même résultat, en remarquant que $\varpi_1 = \varphi_{\mu-1} - c_1 q_2$ est une solution commune des deux équations considérées.

Ayant une solution commune de deux équations du système, nous allons nous en servir pour trouver une fonction qui soit à son tour une solution commune de trois équations du système considéré. Pour cela, nous substituerons ϖ_1 à la place de f_{s+1} dans la troisième équation, et le résultat de la substitution, s'il n'est nul ou constant, sera une nouvelle solution commune des deux premières; et opérant alors sur cette troisième équation comme on l'a fait précédemment sur la seconde, on déterminera une série de fonctions $\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_\lambda$ qui seront des solutions communes des deux premières équations, la fonction ϖ_λ qui termine la série étant une fonction de $\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_{\lambda-1}$ et des variables q_3, q_4, \dots, q_s , à moins qu'elle ne soit nulle ou constante. Si elle était nulle, $\varpi_{\lambda-1}$ serait une solution commune des trois équations; si elle est constante et égale à c_2 , $\varpi_{\lambda-1} - c_2 q_3$ sera cette solution commune; mais, dans le cas général, on se proposera de satisfaire à la troisième équation par une fonction ψ de $\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_{\lambda-1}, q_3, \dots, q_s$, cette fonction étant d'ailleurs, quelle que soit sa forme, une solution commune des deux premières équations. L'équation à laquelle la fonction ψ doit satisfaire est la suivante :

$$(32) \quad 0 = \frac{d\psi}{dq_3} + \frac{d\psi}{d\varpi_1} \varpi_1 + \frac{d\psi}{d\varpi_2} \varpi_2 + \dots + \frac{d\psi}{d\varpi_{\lambda-1}} \varpi_{\lambda-1}.$$

En opérant sur cette équation comme on l'a fait sur la précédente (31), et en continuant de la même façon pour les diverses équations du système considéré, on obtiendra enfin une fonction f_{s+1} de $q_1, q_2, \dots, q_n, p_{s+1}, p_{s+2}, \dots, p_n$ qui sera une solution particulière commune de toutes les équations de ce système. Si l'on pose $f_{s+1} = a_{s+1}$, a_{s+1} étant une constante arbitraire, et que l'on joigne cette équation à celle que l'on a déjà (25), on obtiendra un système de $(s+1)$ équations entre les

quantités $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$, et desquelles on pourra déduire les valeurs de p_1, p_2, \dots, p_{s+1} en fonction de $p_{s+2}, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$, valeurs qui serviront à la composition du système auxiliaire suivant dont dépend la détermination de f_{s+2} . En continuant ainsi, on parviendra à un système de n équations

$$(33) \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \dots, \quad f_m = 0, \quad f_{m+1} = a_{m+1}, \dots, \quad f_n = a_n,$$

qui seront telles, que les valeurs qu'on en déduira pour p_1, p_2, \dots, p_n en fonction de q_1, \dots, q_n et des constantes a_{m+1}, \dots, a_n rendront l'expression $p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n$ une différentielle exacte.

La marche que nous venons de suivre pourrait être un peu modifiée, suivant la remarque qui termine le § IV; mais la modification serait plus marquée si l'on partait des équations (11) au lieu des équations (8) dont on s'est servi jusqu'alors. La méthode à laquelle on serait conduit présenterait sur la précédente l'avantage d'éviter les calculs d'élimination que celle-ci suppose et qui la rendent parfois impraticable.

Supposons qu'il s'agisse, par exemple, de la détermination de la fonction f_{s+1} , elle devra satisfaire au système auxiliaire donné par la formule suivante :

$$(34) \quad \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{df_h}{dp_i} \frac{df_{s+1}}{dq_i} - \frac{df_h}{dq_i} \frac{df_{s+1}}{dp_i} \right) = 0,$$

lorsque h prend successivement les valeurs $1, 2, \dots, s$.

L'intégration de ce système résultera alors de l'application du théorème II, et la marche à suivre sera analogue à la précédente.

On pourrait même généraliser ce qui précède, en supposant les systèmes auxiliaires composés d'équations rentrant dans les formules (26) et (27), et l'intégration s'effectuerait en appliquant tour à tour les théorèmes I et II.

Quelle que soit d'ailleurs la marche suivie, on obtiendra finalement pour p_1, p_2, \dots, p_n des valeurs contenant $n - m$ constantes arbitraires, et telles que, substituées dans l'expression

$$p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n,$$

elles la rendent une différentielle exacte dont l'intégrale sera la fonc-

tion cherchée V. Cette intégrale contiendra $n - m + 1$ constantes arbitraires, en comptant celle qui s'introduit par simple addition; et nous verrons dans la suite que cette solution, que nous appellerons *solution complète*, peut donner toutes les autres par la variation des constantes.

§ VI. — Remarque.

Avant de quitter le sujet dont nous nous sommes occupés jusqu'à présent, nous poserons une remarque qui nous est suggérée par la généralité même de la méthode qui précède, et qui est peut-être susceptible d'application. En examinant un peu les calculs précédents, on remarque facilement que les quantités, $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ y sont simplement considérées comme formant deux séries de variables conjuguées deux à deux, sans que nulle part intervienne la signification de dérivées partielles attachées aux lettres p_1, p_2, \dots, p_n . Si donc on fait abstraction de cette signification des lettres p_1, p_2, \dots, p_n , le problème proposé rentre dans cet autre plus général : *Étant données m relations entre les variables $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ conjuguées deux à deux, on se propose d'en déterminer $n - m$ autres qui, jointes aux premières, permettent d'exprimer n des variables considérées et dont deux ne soient pas conjuguées, en fonction des n autres, de façon que l'expression*

$$(35) \quad \sum_{i=1}^{i=n} (\pm r_i ds_i)$$

soit une différentielle exacte, r_1, r_2, \dots, r_n désignant les n variables choisies et qui sont déterminées en fonction des n autres s_1, s_2, \dots, s_n respectivement conjuguées des précédentes.

Les conditions que les relations données ou inconnues devront satisfaire varieront en général avec la forme de l'expression (35), et il en sera de même de l'intégrale obtenue. Mais, parmi les problèmes compris dans l'énoncé précédent, il en est qui présentent cette particularité remarquable, que les équations proposées doivent satisfaire aux mêmes conditions que dans le cas où il s'agit de former la différentielle exacte $\sum p_i dq_i$; et, en outre, les relations établies subséquentement entre les va-

riables p et q sont aussi les mêmes que dans le cas précédemment considéré. Ces problèmes sont ceux où la différentielle exacte à obtenir est de la forme $\sum_i p_i dq_i - \sum_h q_h dp_h$, i prenant des valeurs quelconques de la suite $1, 2, \dots, n$, et h toutes les autres. Mais l'intégrale différera dans tous les cas de celle obtenue pour $\sum p_i dq_i$; ses dérivées partielles seront les p_i et les q_h , ces derniers précédés du signe $-$; les variables correspondantes seront les q_i et les p_h . Si donc on considère simultanément deux problèmes dont les équations soient en nombre égal, et qui d'ailleurs soient telles, qu'on puisse passer des unes aux autres en remplaçant quelques-unes des variables indépendantes par leurs dérivées partielles correspondantes changées de signe, et ces dernières par les variables correspondantes et de même signe; alors, d'après ce qui précède, ces deux systèmes seront assujettis aux mêmes conditions, c'est-à-dire que, si l'un d'eux est intégrable, l'autre l'est aussi nécessairement; et, en outre, les nouvelles relations entre ces diverses quantités se déduiront les unes des autres par les mêmes changements que les équations proposées. Donc, en intégrant complètement l'un de ces systèmes, on aura immédiatement intégré d'autres systèmes présentant avec le premier les relations que nous avons dites, et pour la recherche de la solution complète desquels il ne reste plus qu'à effectuer la quadrature finale qui est différente dans chacun d'eux.

Démontrons maintenant ce que nous avons annoncé. Pour cela, il suffit de considérer le cas où, dans l'expression $p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n$, on remplace un terme unique $+p_h dq_h$ par $\pm q_h dp_h$. Si nous considérons les conditions (5), (8), (11), elles s'appliquent au cas actuel en y changeant $+p_h$ en $\pm q_h$ et $+q_h$ en $+p_h$; on trouvera alors facilement que les termes dépendant de l'indice h dans la formule (11), par exemple, se réduisent, après les changements indiqués, au groupe suivant :

$$\mp \left(\frac{df_h}{dq_h} \frac{df_i}{dp_h} - \frac{df_h}{dp_h} \frac{df_i}{dq_h} \right);$$

d'où l'on voit que les équations (11) conserveront leur forme normale dans l'hypothèse actuelle, si l'on prend le signe $+$ devant l'expression précédente, c'est-à-dire si l'on remplace $+p_h dq_h$ par $-q_h dp_h$. On démontrerait de même que les équations (8) conservent, dans le cas actuel, leur forme primitive, et, par suite, que les systèmes auxiliaires ne

seront pas modifiés par les changements que nous venons d'indiquer. D'où il résulte bien que, sauf la quadrature finale, tous les problèmes dans lesquels l'expression à rendre une différentielle exacte se ramène à la suivante : $\sum_i p_i dq_i - \sum_h p_h dq_h$, sont résolus en même temps par la résolution de l'un quelconque d'entre eux.

Ce qui précède peut d'ailleurs être établi directement, et, pour cela, il suffit de démontrer que, si les conditions (32) sont telles, que les valeurs qu'on en déduit pour p_1, \dots, p_n en fonction de q_1, \dots, q_n rendent l'expression $p_1 dq_1 + \dots$ une différentielle exacte, ces mêmes équations fourniront pour q_1, p_2, \dots, p_n des valeurs en fonction de p_1, q_2, \dots, q_n qui rendront aussi l'expression $-q_1 dp_1 + p_2 dq_2 + \dots + p_n dq_n$ une différentielle exacte; ou, en d'autres termes, que, pour toute valeur de α , on a

$$\left(\frac{dp_\alpha}{dp_1}\right) = - \left(\frac{dq_1}{dq_\alpha}\right).$$

Soit pour cela $f_i = a_i$ l'une des équations données; en différentiant par rapport à p_1 et par rapport à q_α , on en déduira

$$(36) \quad 0 = \frac{df_i}{dp_1} + \frac{df_i}{dq_1} \left(\frac{dq_1}{dp_1}\right) + \frac{df_i}{dp_2} \left(\frac{dp_2}{dp_1}\right) + \dots + \frac{df_i}{dp_n} \left(\frac{dp_n}{dp_1}\right),$$

$$(37) \quad 0 = \frac{df_i}{dq_\alpha} + \frac{df_i}{dq_1} \left(\frac{dq_1}{dq_\alpha}\right) + \frac{df_i}{dp_2} \left(\frac{dp_2}{dq_\alpha}\right) + \dots + \frac{df_i}{dp_n} \left(\frac{dp_n}{dq_\alpha}\right).$$

Donnant à i successivement les valeurs 1, 2, ..., n , chaque formule précédente donnera un système de n équations d'où l'on pourra déduire, d'une part les valeurs des $\frac{dq_1}{dp_1}, \frac{dp_2}{dp_1}, \dots, \frac{dp_n}{dp_1}$, de l'autre celles des $\frac{dq_1}{dq_\alpha}, \frac{dp_2}{dq_\alpha}, \dots, \frac{dp_n}{dq_\alpha}$. Ces deux systèmes ont pour déterminant commun

$$\Delta = \sum \left(\pm \frac{df_i}{dq_1} \frac{df_i}{dp_2} \dots \frac{df_i}{dp_n} \right),$$

qui peut s'écrire, en ordonnant par rapport aux produits des éléments des colonnes verticales de rangs 1 et α ,

$$(38) \quad \Delta = \sum_i \sum_k \left(\frac{df_i}{dq_1} \frac{df_{i+k}}{dp_\alpha} - \frac{df_{i+k}}{dq_1} \frac{df_i}{dp_\alpha} \right) \delta_{i, i+k}^{(i, i+k)},$$

$\delta_{i, i+k}^{(i, i+k)}$ étant le déterminant qui résulte de Δ quand on y supprime les

colonnes verticales de rangs 1 et α , et les colonnes horizontales de rangs i et $i+k$; i devant recevoir successivement toutes les valeurs 1, 2, ..., $n-1$, et k , pour chaque valeur de i , toutes les valeurs positives satisfaisant à la condition $k \leq n-1$. D'après un théorème connu, on a identiquement

$$(39) \quad 0 = \sum_i \sum_k \left(\frac{df_i}{dp_{\alpha'}} \frac{df_{i+k}}{dp_{\alpha}} - \frac{df_{i+k}}{dp_{\alpha'}} \frac{df_i}{dp_{\alpha}} \right) \delta_{1,\alpha}^{(i,i+k)},$$

et par conséquent aussi

$$(40) \quad 0 = \sum_i \sum_k \left(\frac{df_i}{dp_{\alpha'}} \frac{df_{i+k}}{dq_{\alpha'}} - \frac{df_{i+k}}{dp_{\alpha'}} \frac{df_i}{dq_{\alpha'}} \right) \delta_{1,\alpha}^{(i,i+k)}.$$

Mais les systèmes d'équations déduits des formules (36) et (37) donnent

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dq_{\alpha}} &= + \sum_i \sum_k \left(- \frac{df_i}{dq_{\alpha}} \frac{df_{i+k}}{dp_{\alpha}} + \frac{df_i}{dp_{\alpha}} \frac{df_{i+k}}{dq_{\alpha}} \right) \delta_{1,\alpha}^{(i,i+k)}, \\ \frac{dp_{\alpha}}{dp_1} &= + \sum_i \sum_k \left(- \frac{df_i}{dq_1} \frac{df_{i+k}}{dp_1} + \frac{df_i}{dp_1} \frac{df_{i+k}}{dq_1} \right) \delta_{1,\alpha}^{(i,i+k)}; \end{aligned}$$

en additionnant ces deux valeurs avec les identités déduites de (40), en donnant à α' les valeurs 2, 3, ..., $\alpha-1$, $\alpha+1$, ..., n , on aura

$$\frac{dq_1}{dq_{\alpha}} + \frac{dp_{\alpha}}{dp_1} = \sum_i \sum_k (f_i f_{i+k}) \delta_{1,\alpha}^{(i,i+k)},$$

et comme les fonctions f_i , f_{i+k} satisfont par hypothèse aux conditions (11), on en conclura que

$$\frac{dq_1}{dq_{\alpha}} = - \frac{dp_{\alpha}}{dq_1},$$

ce qui est justement ce que l'on voulait démontrer.

§ VII. — Des diverses classes de solutions d'un système d'équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre.

Nous appellerons *intégrale* ou *solution complète* d'un système d'équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre, une solution renfermant un nombre tel de constantes arbitraires, que l'on puisse, par

leur élimination entre la fonction et ses dérivées du premier ordre, obtenir un système d'équations équivalent à celui qui est proposé.

D'après cette définition, l'intégrale complète représentera, entre la fonction et les variables, des dépendances précisément équivalentes à celles qui sont exprimées par les équations proposées.

D'après la définition précédente, on voit immédiatement que, *si le système proposé se compose de m équations, le nombre des variables étant égal à n , celui des constantes entrant dans la solution complète sera égal à $n - m + 1$, les équations proposées étant d'ailleurs supposées satisfaire aux conditions d'intégrabilité.*

Remarquons que, si les équations proposées ne renferment pas la fonction cherchée, l'élimination ne devra s'effectuer qu'entre les équations dérivées de la solution complète; par conséquent, si l'on a m équations, les dérivées en question ne pourront contenir que $n - m$ constantes. Mais, quant à l'intégrale complète, elle contiendra, comme précédemment, $n - m + 1$ constantes, en comptant celle qui s'introduit par simple addition.

Ceci posé, nous nous proposons de déduire de nouvelles solutions des équations proposées, en remplaçant les constantes de la solution complète par des fonctions des variables: ces fonctions devront être tellement choisies, que la nouvelle valeur obtenue pour la solution satisfasse encore aux équations proposées.

Si $V = f(q_1, q_2, \dots, q_n, a_1, a_2, \dots, a_h)$ est l'intégrale complète d'un système de $n - h + 1$ équations, les conditions que devront satisfaire les fonctions de q_1, q_2, \dots, q_n , mises à la place des constantes a_1, a_2, \dots, a_h , seront exprimées par les équations déduites de la formule suivante:

$$(41) \quad \sum_{i=1}^{i=h} \frac{df}{da_i} \frac{da_i}{dq_k} = 0,$$

quand on y remplace k successivement par les nombres $1, 2, \dots, n$.

Pour déduire des équations précédentes (41) les conséquences qu'elles comportent, nous nous servirons du théorème suivant qui exprime la propriété principale des déterminants fonctionnels de Jacobi:

THÉORÈME. — *Si n fonctions f_1, f_2, \dots, f_n de n variables indépendantes*

q_1, q_2, \dots, q_n ont entre elles une ou plusieurs relations quelconques, le déterminant fonctionnel de ces fonctions est nul.

Réciproquement, si le déterminant fonctionnel de n fonctions à n variables est nul, il y a entre ces fonctions une ou plusieurs relations.

Revenons maintenant aux équations (41), et voyons de quelle façon on pourra les satisfaire.

Supposons, en premier lieu, qu'en prenant d'une manière quelconque k équations du système (41), le déterminant de ce système partiel dans lequel les termes de la forme $\frac{df}{da_i}$ sont considérés comme les inconnues, soit différent de zéro, et cela pour tous les groupes possibles de k équations : les équations précédentes ne pourront alors être satisfaites qu'en posant

$$\frac{df}{da_1} = 0, \quad \frac{df}{da_2} = 0, \dots, \quad \frac{df}{da_h} = 0.$$

Résolvant ces équations par rapport aux quantités a_1, a_2, \dots, a_h , on déterminera pour ces dernières quantités des valeurs en fonction des variables q_1, \dots, q_n , et qui seront telles, que, substituées dans la solution complète à la place des constantes, la fonction obtenue sera une solution des équations intégrées. Les solutions de cette nature sont en nombre limité, et présentent cette particularité, qu'elles ne contiennent aucune quantité arbitraire. Nous les désignerons sous le nom de *solutions singulières*.

Si, contrairement à ce qui précède, on suppose maintenant que l'un au moins des déterminants dont il est question précédemment soit nul, il suffira, pour cela, d'établir une ou plusieurs relations, quelconques d'ailleurs, entre les fonctions a_1, \dots, a_h , et les équations (41) seront alors identiquement satisfaites, quelles que soient les fonctions et les relations qui existent entre elles. Suivant le nombre de relations que nous établirons entre les fonctions en question, nous obtiendrons des classes de solutions ayant des caractères très-différents; ces solutions contiendront un nombre plus ou moins grand de fonctions arbitraires, et pour cela nous les appellerons des *intégrales générales*.

Supposons d'abord que l'on n'établisse qu'une seule relation entre les fonctions a_1, a_2, \dots, a_h , et que l'une de ces quantités a_h soit une

fonction arbitraire des autres, en totalité ou en partie, on aura

$$(42) \quad V = f(q_1, q_2, \dots, q_n, a_1, \dots, a_h), \quad a_h = \varphi(a_1, \dots, a_{h-1}).$$

Si, dans cette hypothèse, on dérive la fonction V par rapport à q_i , en remarquant que

$$p_i = \frac{df}{dq_i},$$

on aura

$$0 = \sum_{k=1}^{k=h-1} \frac{df}{da_k} \frac{da_k}{dq_i} + \frac{df}{da_h} \sum_{k=1}^{k=h-1} \frac{d\varphi}{da_k} \frac{da_k}{dq_i};$$

multipliant par dq_i , et ajoutant les égalités obtenues de la précédente en donnant à i les valeurs $1, 2, \dots, n$, et égalant séparément à zéro les coefficients des différentielles $da_1, da_2, \dots, da_{h-1}$, on aura $h-1$ équations de la forme

$$(43) \quad \begin{cases} 0 = \frac{df}{da_k} + \frac{df}{da_h} \frac{d\varphi}{da_k}, \\ (k = 1, 2, \dots, h-1). \end{cases}$$

Ces dernières équations permettraient, dans le cas où la fonction φ serait particularisée, d'éliminer les arbitraires a_1, a_2, \dots, a_{h-1} de l'intégrale V qui contient aussi une fonction arbitraire.

La solution V , accompagnée des $(h-1)$ équations (43), représente une intégrale générale de l'espèce qui ne contient qu'une fonction arbitraire.

Si maintenant nous supposons que l'on exprime en général un nombre r des fonctions a_1, a_2, \dots, a_h en fonction des $h-r$ autres, on aura, pour l'une d'elles,

$$a_{h-r+l} = \varphi_l(a_1, a_2, \dots, a_{h-r}), \quad (l = 1, 2, \dots, r),$$

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$ étant des fonctions arbitraires.

Si l'on dérive, comme précédemment, la fonction V par rapport à q_i , en supposant que a_1, a_2, \dots, a_h soient des fonctions présentant entre elles les relations que nous avons dites, on trouvera n équations de la forme

$$0 = \sum_{k=1}^{k=h-r} \frac{df}{da_k} \frac{da_k}{dq_i} + \sum_{l=1}^{l=r} \frac{df}{da_{h-r+l}} \sum_{k=1}^{k=h-r} \frac{d\varphi_l}{da_k} \frac{da_k}{dq_i},$$

en faisant successivement $i = 1, 2, 3, \dots, n$; elles conduiront à leur tour aux $h - r$ équations de la forme suivante :

$$(44) \quad 0 = \frac{df}{da_k} + \sum_{l=1}^{l=r} \frac{df}{da_{h-r+l}} \frac{d\varphi_l}{da_k},$$

en faisant successivement $k = 1, 2, 3, \dots, h - r$.

Ces équations permettraient de déterminer les valeurs des fonctions a_k si les formes des fonctions φ_l étaient particularisées; la fonction V , accompagnée de ces $h - r$ équations, représente une intégrale générale de l'espèce qui contient r fonctions arbitraires. Si l'on attribue à r successivement les valeurs $1, 2, \dots, h - 1$, on aura les formules de $h - 1$ classes de solutions générales renfermant successivement $1, 2, \dots, h - 1$ fonctions arbitraires. Le cas d'une seule fonction arbitraire que nous avons considéré isolément est compris dans la formule actuelle, ainsi que le dernier cas où toutes les constantes, moins une, sont des fonctions de cette dernière.

Ces différentes classes de solutions ont un caractère très-différent, suivant le nombre des relations arbitraires que l'on suppose exister entre les constantes arbitraires. La classe renfermant les solutions les plus générales est celle où il n'entre qu'une relation entre les constantes, et cette généralité diminue quand le nombre des relations, et par suite des fonctions arbitraires, augmente; car il est visible que l'étendue ou l'indétermination des résultats est d'autant plus grande que les constantes ont moins de conditions à satisfaire. A la limite de ces classes, on peut considérer l'intégrale complète, puisque l'on peut supposer h relations arbitraires entre les h constantes, ce qui donnerait pour chacune d'elles une fonction arbitraire de quantités constantes, c'est-à-dire une constante arbitraire.

Les solutions des diverses classes peuvent encore renfermer dans leurs fonctions arbitraires des constantes aussi arbitraires et en nombre quelconque. Si donc, dans l'une des solutions générales, on donne aux fonctions arbitraires en tout h constantes aussi arbitraires, en particulierisant d'une manière quelconque les fonctions, l'intégrale générale considérée deviendra une *solution complète* de laquelle on pourrait déduire des classes de solutions dont le degré de généralité dépendrait

aussi du nombre des fonctions arbitraires qu'elles contiendraient respectivement. Il semblerait donc, d'après cela, que le nombre des solutions complètes, et par suite celui des solutions des diverses classes, doive être considéré comme infini; mais nous démontrerons dans la suite que l'on peut d'une solution complète unique déduire toutes les autres solutions dont le système d'équations proposé est susceptible; d'où il résulte que les solutions déduites de plusieurs solutions complètes rentrent les unes dans les autres.

On peut aussi particulariser chaque solution générale de manière qu'il en résulte une solution appartenant à une classe moins générale. Par exemple, si k constantes sont des fonctions arbitraires des $h - k$ autres, et si l est compris entre h et k , on peut particulariser les k fonctions arbitraires de façon qu'elles contiennent l fonctions arbitraires de $h - l$ constantes; on pourra alors regarder cette solution comme appartenant à une classe moins générale que la première, et pouvant se déduire de la solution complète en y considérant l constantes comme fonctions arbitraires des autres, et en mettant pour celles-ci de telles fonctions, que les coefficients différentiels partiels de la solution complète, pris par rapport à elles, s'évanouissent.

Enfin, pour terminer ces généralités, nous remarquerons qu'il pourrait se faire aussi que les fonctions arbitraires, au nombre de r , par exemple, qui entrent dans les intégrales générales de la $r^{\text{ième}}$ classe, ne continssent pas toutes les $h - r$ dernières constantes arbitraires. On pourrait alors, sans particulariser les fonctions arbitraires, éliminer de la solution considérée les constantes qui n'entrent dans aucune fonction arbitraire. Les valeurs de ces dernières, que nous supposerons être a_1, a_2, \dots, a_s , seraient données par les équations

$$\frac{df}{da_1} = 0, \quad \frac{df}{da_2} = 0, \dots, \quad \frac{df}{da_s} = 0.$$

Les valeurs fournies par ces équations pour a_1, \dots, a_s contiendront les fonctions arbitraires $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ de a_{s+1}, \dots, a_{h-r} , ainsi que ces dernières constantes; substituant ces valeurs dans la solution générale, elle contiendra, outre les constantes a_{s+1}, \dots, a_{h-r} , r fonctions arbitraires de ces mêmes constantes; les fonctions mises à la place des constantes restantes devront satisfaire à des équations de la forme (44),

où k ne devra recevoir que les valeurs suivantes : $s + 1, s + 2, \dots, h - r$.

Remarquons aussi que, dans la recherche des intégrales générales, aussi bien que dans celle des solutions singulières, certaines constantes auraient pu être considérées absolument comme telles. Pour les intégrales générales, cela ne conduit à rien de particulier; mais, dans le cas des solutions singulières, si l'on remplace les constantes demeurées telles par des fonctions présentant entre elles une ou plusieurs relations, ces solutions nouvelles satisferont aux équations proposées, et l'on aura ainsi une nouvelle classe de solutions ne rentrant ni dans la catégorie des intégrales générales, ni dans celle des solutions singulières. Ces *solutions*, que nous appellerons *mixtes*, pourraient se diviser en classes et en groupes dépendant du plus ou moins grand nombre de constantes laissées telles dans la recherche des solutions singulières, et aussi du nombre de relations établies entre les fonctions que l'on substitue à ces constantes. Il nous suffit d'indiquer cette nouvelle catégorie de solutions auxquelles on pourrait d'ailleurs appliquer quelques-unes des observations relatives aux intégrales générales. Maintenant, avant de démontrer le théorème important que nous avons précédemment énoncé, nous allons vérifier que *l'élimination des fonctions arbitraires que renferme une solution générale quelconque conduit bien à un système de $n - h + 1$ équations aux dérivées partielles du premier ordre*, n étant le nombre des variables indépendantes, et h le nombre des constantes de la solution complète.

Considérons, en effet, une intégrale générale renfermant r fonctions arbitraires des $h - r$ constantes a_1, a_2, \dots, a_{h-r} , les fonctions substituées à ces dernières constantes étant d'ailleurs assujetties à satisfaire aux équations (44); on aura, en différentiant l'intégrale par rapport à q_i ,

$$p_i = \frac{df}{dq_i} + \sum_{k=1}^{h-r} \frac{df}{da_k} \frac{da_k}{dq_i} + \sum_{l=1}^r \frac{df}{da_{h-r+l}} \sum_{k=1}^{h-r} \frac{d\varphi_l}{da_k} \frac{da_k}{dq_i},$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Mais, au moyen des équations (44), le système précédent se réduit au

suivant :

$$p_1 = \frac{df}{dq_1}, \quad p_2 = \frac{df}{dq_2}, \dots, \quad p_n = \frac{df}{dq_n};$$

et, si l'on élimine entre ces dernières équations et l'intégrale générale considérée les quantités $a_1, a_2, \dots, a_{h-r}, \varphi_1, \dots, \varphi_r$, au nombre de h , on obtiendra bien finalement un système de $n - h + 1$ équations, comme nous nous proposons de le démontrer.

Enfin, pour terminer, nous allons établir le théorème général suivant :

Toutes les solutions dont un système d'équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre est susceptible peuvent se déduire d'une solution complète unique.

Soit $V = \psi(q_1, q_2, \dots, q_n)$ une solution commune des $n - m$ équations simultanées dont l'une est la suivante :

$$(45) \quad \begin{cases} f_i(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = 0, \\ (i = 1, 2, 3, \dots, n - m), \end{cases}$$

et soit

$$(46) \quad V = f(q_1, q_2, \dots, q_n, a_1, a_2, \dots, a_{m+1})$$

une solution complète de ce système.

Si nous déterminons les valeurs des constantes a_1, a_2, \dots, a_{m+1} au moyen des $m + 1$ équations suivantes :

$$(47) \quad f = \psi, \quad \frac{df}{dq_1} = \frac{d\psi}{dq_1}, \dots, \quad \frac{df}{dq_m} = \frac{d\psi}{dq_m},$$

je dis que les dérivées des fonctions f et ψ , par rapport aux variables q_{m+1}, \dots, q_n , seront aussi égales chacune à chacune.

En effet, par hypothèse, on a les deux systèmes d'équations satisfaites résultant des deux formules suivantes :

$$f_i\left(q_1, q_2, \dots, q_n, \frac{d\psi}{dq_1}, \dots, \frac{d\psi}{dq_n}\right) = 0, \quad f_i\left(q_1, \dots, q_n, \frac{df}{dq_1}, \dots, \frac{df}{dq_n}\right) = 0,$$

quand on donne à i les valeurs successives $1, 2, \dots, n - m$; et le der-

nier de ces systèmes, en vertu des équations (47), devient le suivant :

$$f_i \left(q_1, q_2, \dots, q_m, \frac{d\psi}{dq_1}, \dots, \frac{d\psi}{dq_m}, \frac{df}{dq_{m+1}}, \dots, \frac{df}{dq_n} \right) = 0, \\ (i = 1, 2, 3, \dots, n - m).$$

Comparant alors ce dernier système au premier, on en conclut les égalités

$$(48) \quad \frac{df}{dq_{m+1}} = \frac{d\psi}{dq_{m+1}}, \dots, \quad \frac{df}{dq_n} = \frac{d\psi}{dq_n},$$

qui auront lieu en même temps que les équations (47). Donc si, dans la solution complète, on attribue aux constantes a_1, \dots, a_{m+1} les valeurs déterminées par les équations (47), elle devient égale à la fonction ψ , et les dérivées successives de ces deux fonctions le sont aussi : la solution $V = \psi$ est donc bien comprise dans la solution complète. Il nous reste à déterminer l'espèce de la solution.

Les valeurs obtenues des équations (47), pour les constantes a_1, a_2, \dots, a_{m+1} , sont généralement des fonctions des variables q_1, q_2, \dots, q_n . Dans le cas particulier où ces valeurs seraient constantes, la solution considérée serait une solution particulière de l'intégrale complète. Dans le cas général, si l'on remplace dans la fonction f les constantes par leurs valeurs, on aura l'identité $f = \psi$; différentiant, par rapport à q_k , les deux membres de cette égalité, on aura

$$\frac{d\psi}{dq_k} = \frac{df}{dq_k} + \sum_{h=1}^{h=m+1} \frac{df}{da_h} \frac{da_h}{dq_k}, \\ (k = 1, 2, 3, \dots, n);$$

comparant ces égalités aux précédentes (47), (48), qu'on suppose satisfaites, on aura le système suivant de conditions :

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \sum_{h=1}^{h=m+1} \frac{df}{da_h} \frac{da_h}{dq_k}, \\ (k = 1, 2, \dots, n). \end{array} \right.$$

Si les valeurs obtenues pour a_1, a_2, \dots, a_{m+1} sont telles, qu'en prenant un groupe quelconque de m équations du système précédent, le déter-

minant correspondant, et dont les éléments sont les dérivées partielles des fonctions mises pour a_1, a_2, \dots, a_{m+1} , soit différent de zéro, alors les équations (49) exigent que l'on ait en même temps

$$\frac{df}{da_1} = 0, \quad \frac{df}{da_2} = 0, \dots, \quad \frac{df}{da_{m+1}} = 0,$$

c'est-à-dire que la solution considérée rentre dans la catégorie des solutions singulières. Mais si, contrairement à ce qui précède, de quelque façon que l'on choisisse m équations du système (49), le déterminant du système ainsi formé est constamment égal à zéro, les fonctions a_1, a_2, \dots, a_{m+1} ont entre elles une ou plusieurs relations, et la solution considérée est une solution particulière de l'une des intégrales générales.

En terminant, nous remarquerons que, si l'on a à intégrer un système d'équations en nombre égal à celui des variables, l'intégrale complète ne contiendra plus qu'une constante; dans ce cas, l'intégrale générale se confond avec la solution complète, et, quant aux solutions singulières, elles résultent encore de l'élimination de la constante a_1 entre les deux équations

$$V = f(q_1, q_2, \dots, q_n, a_1) \quad \text{et} \quad \frac{df}{da_1} = 0.$$

Dans le paragraphe suivant, nous allons appliquer à un exemple particulier la méthode d'intégration précédemment développée pour l'intégration des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre.

§ VIII. — Application.

Soit proposé d'intégrer le système suivant :

$$f_1 = p_1 p_4 - q_1 q_3 = 0,$$

$$f_2 = p_2 p_3 - q_1 q_4 = 0.$$

Si nous formons l'expression représentée par le symbole (f_1, f_2) , nous trouvons qu'elle ne s'annule pas, et que sa valeur f_3 est la suivante :

$$f_3 = q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_3 p_3 + q_4 p_4.$$

On trouve ensuite que ces trois fonctions f_1, f_2, f_3 donnent $(f_1, f_2) = 0$, $(f_2, f_3) = 0$; posant donc $f_2 = 0$, c'est-à-dire $(f_1, f_2) = 0$, la question sera ramenée à l'intégration d'un système de trois équations

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0.$$

satisfaisant aux conditions d'intégrabilité.

Nous avons à chercher une nouvelle relation de la forme $f_4 = a$, qui, jointe aux précédentes, permette de déterminer pour p_1, p_2, p_3, p_4 des valeurs en fonction de q_1, q_2, q_3, q_4 , qui, substituées dans l'expression $p_1 dq_1 + \dots + p_4 dq_4$, la rendent une différentielle exacte.

Si nous supposons que des équations (49) on tire les valeurs de p_1, p_2, p_3 en fonctions de p_4, q_1, q_2, q_3, q_4 , la fonction f_4 devra satisfaire à un système de trois équations dont la formule est la suivante :

$$0 = \frac{df}{dq_m} + \frac{dp_m}{dq_1} \frac{df}{dp_1} - \frac{dp_m}{dp_1} \frac{df}{dq_1},$$

$$(m = 1, 2, 3).$$

Les équations (49) nous donnent les valeurs suivantes :

$$p_1 = \frac{q_2 q_3}{p_4}, \quad p_2 = \frac{q_1 q_4}{p_3}, \quad p_3 = \frac{q_1 q_2 q_3 + q_1 p_4^2 \pm (q_1 q_2 q_3 - q_1 p_4^2)}{2 q_3 p_4},$$

pour lesquelles il nous faudra considérer deux cas, suivant le signe que l'on prend dans la valeur de p_3 .

Premier cas. — On prend le signe supérieur, d'où

$$p_1 = \frac{q_2 q_3}{p_4}, \quad p_2 = \frac{q_1 p_4}{q_2}, \quad p_3 = \frac{q_1 q_2}{p_4};$$

les équations du système auxiliaires sont alors les suivantes :

$$0 = \frac{df}{dq_1} + \frac{q_2 q_3}{p_4^2} \frac{df}{dq_4},$$

$$0 = \frac{df}{dq_2} + \frac{p_4}{q_2} \frac{df}{dp_1} - \frac{q_1}{p_2} \frac{df}{dq_1},$$

$$0 = \frac{df}{dq_3} + \frac{q_1 q_2}{p_4^2} \frac{df}{dq_1}.$$

La première de ces équations admet la solution

$$f = q_1 - \frac{q_1 q_2 q_3}{p_1^2} = \varphi_1;$$

portant cette valeur dans la seconde équation, à la place de f , on obtient, pour le résultat,

$$\varphi_2 = -\frac{q_1}{q_2} + \frac{q_1 q_3}{p_1^2} = -\frac{\varphi_1}{q_2},$$

qui n'est pas une nouvelle solution, mais simplement une fonction de la première, puisque, dans cette première équation, q_2 est considéré comme une constante. Une fonction quelconque de φ_1, q_2, q_3 sera encore une solution de la première équation; soit $\varpi(\varphi_1, q_2, q_3)$ une telle fonction : nous nous proposons de déterminer la forme de cette fonction ϖ de façon qu'elle soit aussi une solution de la seconde équation. La condition pour que cela ait lieu est que l'on ait

$$0 = \frac{d\varpi}{dq_2} + \frac{d\varpi}{dq_3} \varphi_2.$$

Cette équation admet la solution particulière $q_2 \varphi_1$, qui, satisfaisant aussi, comme il est facile de le constater, à la troisième équation du système, sera la solution commune cherchée. On devra donc joindre aux équations (49) la suivante :

$$f = q_1 q_2 - \frac{q_1 q_2^2 q_3}{p_1^2} = a,$$

et de ces quatre équations on déduira

$$\begin{aligned} p_1 &= q_3 \frac{\sqrt{q_2 q_3} - a}{\sqrt{q_1 q_3}}, & p_2 &= q_1 \frac{\sqrt{q_1 q_3}}{\sqrt{q_2 q_3} - a}, \\ p_3 &= q_1 \frac{\sqrt{q_2 q_3} - a}{\sqrt{q_1 q_2}}, & p_4 &= q_2 \frac{\sqrt{q_1 q_3}}{\sqrt{q_2 q_3} - a}. \end{aligned}$$

La différentielle exacte $p_1 dq_1 + \dots + p_4 dq_4$ aura ainsi pour intégrale la fonction

$$V = 2 q_1^{\frac{1}{2}} q_3^{\frac{1}{2}} (q_2 q_3 - a)^{\frac{1}{2}} + b,$$

et c'est là une solution complète des équations proposées. Il est facile

de vérifier qu'elle ne donne pas de solutions singulières, et qu'elle admet pour intégrale générale celle qui est définie par le système

$$V = 2q_1^{\frac{1}{2}} q_2^{\frac{1}{2}} (q_1 q_2 - a)^{\frac{1}{2}} + \varphi(a), \quad 0 = q_1^{\frac{1}{2}} q_2^{\frac{1}{2}} (q_1 q_2 - a)^{-\frac{1}{2}} - \varphi'(a),$$

φ représentant une fonction complètement arbitraire.

Deuxième cas. — On prend le signe inférieur dans la valeur de p_3 ; on a alors

$$p_1 = \frac{q_2 q_3}{p_1}, \quad p_2 = \frac{q_1 q_3}{p_1}, \quad p_3 = \frac{q_1 p_1}{q_3},$$

et le système auxiliaire est le suivant :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{df}{dq_1} + \frac{q_2 q_3}{p_1^2} \frac{df}{dq_1}, \\ 0 &= \frac{df}{dq_2} + \frac{q_1 q_3}{p_1^2} \frac{df}{dq_2}, \\ 0 &= \frac{df}{dq_3} + \frac{p_1}{q_3} \frac{df}{dp_1} - \frac{q_1}{q_3} \frac{df}{dq_1}. \end{aligned}$$

En opérant comme précédemment, on trouve, pour solution commune de ces équations,

$$f_1 = q_1 q_2 - \frac{q_1 q_2 q_3^2}{p_1^2};$$

posant $f_1 = a_1$, et joignant cette équation au système (49), on en déduira les valeurs de p_1, p_2, p_3, p_4 , et l'on trouvera la solution complète

$$V = 2q_1^{\frac{1}{2}} q_2^{\frac{1}{2}} (q_1 q_2 - a_1)^{\frac{1}{2}} + b,$$

qui jouit des mêmes propriétés que la précédente.

§ IX. — *Intégration des équations linéaires.*

Le problème de l'intégration des équations linéaires est résolu d'une manière générale en même temps que celui des équations quelconques, car la méthode que nous avons développée leur est en tout point appli-

cable. Mais cette méthode générale nécessite elle-même l'intégration directe de systèmes linéaires auxiliaires d'une forme spéciale. Nous nous proposons d'étendre cette méthode aux équations linéaires quelconques, et de la compléter de façon qu'elle puisse nous conduire à la solution complète, tandis que précédemment on ne se proposait que la recherche d'une solution particulière commune.

On aura bien encore ici à considérer des systèmes successifs d'équations simultanées; mais d'un système au suivant, le nombre des équations, ainsi que celui des termes de chacune d'elles, diminuera d'une unité. Il n'en faudrait pas pourtant conclure que cette méthode soit, pour cette raison, bien supérieure à la méthode générale; car elle présente, en revanche, le désavantage d'exiger constamment des intégrations complètes, alors que, pour la première, il ne fallait déterminer chaque fois qu'une solution particulière; aussi, dans la pratique, préférera-t-on souvent la méthode générale comme présentant plus de chances de réussite, sans exiger pour cela des calculs beaucoup plus étendus.

Si nous considérons les équations d'un système auxiliaire (§ IV), nous voyons qu'elles sont homogènes, et que l'équation de rang k ne contient que les termes en p_k, p_{m+1}, \dots, p_n , m étant le nombre des équations du système considéré. Nous allons montrer que tout système d'équations linéaires peut être ramené à cette forme, et, pour cela, il suffit de pouvoir les rendre homogènes, car alors, par des éliminations convenablement dirigées, on parviendra toujours à mettre les équations sous la forme désirée.

Soit donc proposé d'intégrer un système de m équations distinctes de la forme

$$(50) \quad X_1^k p_1 + X_2^k p_2 + \dots + X_m^k p_m + \dots + X_n^k p_n - X^k = 0,$$

X^k, X_1^k, \dots, X_n^k étant des fonctions de q_1, q_2, \dots, q_n , ne contenant pas la fonction cherchée V ; les différentes équations du système s'obtiendront de la précédente en attribuant à k successivement les valeurs $1, 2, \dots, m$.

Si ces équations ne satisfont pas toutes aux conditions d'intégrabilité, on sera conduit à ajouter de nouvelles équations à celles qui sont proposées, et il est facile de voir que ces nouvelles relations ont la même

forme que les premières; le problème proposé conservera donc la même forme dans tous les cas où il est possible.

Pour rendre ces équations homogènes, nous remarquerons que, si u est une fonction quelconque de la fonction cherchée v et des variables q_1, q_2, \dots, q_n , on aura

$$p_i = - \frac{\frac{du}{dq_i}}{\frac{du}{dv}},$$

et par suite l'équation (50) deviendra la suivante :

$$X^1 \frac{du}{dv} + X^1 \frac{du}{dq_1} + \dots + X^n \frac{du}{dq_n} = 0.$$

Toutes les équations du système (50) seront donc ainsi rendues homogènes par rapport aux dérivées partielles de la nouvelle fonction u , la fonction v n'étant plus alors considérée que comme une simple variable; comme la fonction u n'entre pas non plus dans les coefficients, les équations ont bien la forme que nous voulions leur donner. Mais ici ce n'est plus la fonction v que l'on se propose de déterminer, mais une fonction u de v et des variables; et, quand on aura trouvé cette fonction u , en l'égalant à zéro, on aura une équation d'où l'on déduira la valeur de v .

Remarquons que la transformation précédente conviendrait encore dans le cas où les coefficients renfermeraient la fonction cherchée, en supposant satisfaites les conditions d'intégrabilité relatives à ce cas (11 bis).

Nous supposerons dorénavant que le système à intégrer se compose de m équations linéaires, homogènes, ne contenant pas la fonction cherchée, et enfin, satisfaisant aux conditions d'intégrabilité. Soient

$$(51) \quad f_i = X^1_i \frac{dv}{dq_1} + X^2_i \frac{dv}{dq_2} + \dots + X^n_i \frac{dv}{dq_n} = 0,$$

$$(52) \quad f_h = X^1_h \frac{dv}{dq_1} + \dots + X^n_h \frac{dv}{dq_n} = 0$$

deux équations quelconques d'un tel système : nous nous proposons de démontrer que le théorème I (§ IV) s'applique à ces équations, c'est-à-

dire que si $v = \varphi$ est une solution de la première de ces équations, le résultat ψ de la substitution de φ à la place de v , dans la seconde, sera encore une solution de la première, si toutefois ce résultat n'est pas identiquement nul ou constant.

En effet, par hypothèse, les fonctions f_i, f_h satisfont à la condition

$$(f_i f_h) = 0,$$

qui, développée, donne l'équation suivante :

$$\sum_a X_a^h \frac{d}{dq_a} \sum_p X_p^i p_p - \sum_a X_a^i \frac{d}{dq_a} \sum_p X_p^h p_p = 0.$$

Mais, $v = \varphi$ étant une solution de la première équation, on aura identiquement

$$\sum_p X_p^i \frac{d\varphi}{dq_p} \quad \text{ou} \quad \sum_p X_p^i p_p = 0;$$

d'où il suit que l'équation précédente devient alors

$$X_1^i \frac{d\psi}{dq_1} + X_2^i \frac{d\psi}{dq_2} + \dots + X_n^i \frac{d\psi}{dq_n} = 0,$$

en posant

$$\sum_p X_p^h \frac{d\varphi}{dq_p} \quad \text{ou} \quad \sum_p X_p^h p_p = \psi,$$

ce qui démontre précisément le théorème énoncé, puisque ψ est bien, d'après ce qui est posé, le résultat de la substitution de φ à v dans la seconde équation, et que l'égalité qui vient d'être obtenue exprime précisément que ψ satisfait à la première équation. Si donc ψ n'est pas une constante, ce sera une solution de l'équation (51), solution qui peut d'ailleurs n'être qu'une fonction de la précédente.

Le théorème qui précède nous permet de résoudre le proposé, et, pour cela, nous suivrons la méthode de Boole (*); mais nous rappellerons préalablement quelques propriétés des équations linéaires isolées, et qui s'étendent immédiatement aux équations simultanées.

On sait qu'une équation linéaire aux dérivées partielles renfermant

(*) BOOLE, *Philosophical Transactions*, 1863.

n variables admet en général n intégrales particulières distinctes qui, dans le cas où la fonction cherchée n'entre pas dans les coefficients, représentent précisément les n valeurs distinctes de la fonction cherchée satisfaisant à l'équation considérée, l'une de ces solutions se réduisant toutefois à une constante, dans le cas où l'équation est homogène. On sait en outre que toute fonction de ces solutions satisfait aussi à l'équation proposée; et réciproquement, que toute solution est une fonction des précédentes. Ces propriétés des équations isolées étant rappelées, on voit sans peine qu'elles s'appliquent aussi aux équations simultanées, le nombre des solutions particulières distinctes étant seul modifié.

Pour ce qui va suivre, nous avons besoin de connaître *ce que devient une équation linéaire quand on change de variables.*

Soit l'équation

$$(53) \quad X_1^k \frac{dv}{dq_1} + X_2^k \frac{dv}{dq_2} + \dots + X_n^k \frac{dv}{dq_n} = X^k,$$

dont nous représenterons le premier membre par $(\Delta_k v)$, et supposons que les n variables q_1, q_2, \dots, q_n soient exprimées en fonction des n autres r_1, r_2, \dots, r_n : on propose de trouver ce que devient l'équation après ce changement.

Si l'on suppose la fonction v exprimée en fonction des nouvelles variables, on aura

$$\frac{dv}{dq_k} = \frac{dv}{dr_1} \frac{dr_1}{dq_k} + \dots + \frac{dv}{dr_n} \frac{dr_n}{dq_k},$$

et par suite l'équation (53) pourra s'écrire, en groupant les termes d'une façon convenable,

$$(54) \quad (\Delta_k r_1) \frac{dv}{dr_1} + (\Delta_k r_2) \frac{dv}{dr_2} + \dots + (\Delta_k r_n) \frac{dv}{dr_n} = X^k,$$

et c'est là le résultat cherché, si l'on suppose toutefois que, dans la fonction X^k , q_1, q_2, \dots, q_n soient remplacés par leurs valeurs en fonction de r_1, r_2, \dots, r_n .

Nous ajouterons que, si les équations telles que (53) satisfaisaient aux conditions d'intégrabilité, ces dernières (54) y satisferont aussi, d'après la remarque qui termine le § II.

Passons maintenant à l'intégration d'un système de m équations ho-

mogènes, la fonction cherchée n'entrant pas dans les coefficients, et supposons ces équations mises sous la forme

$$(55) \quad X_k^h \frac{dv}{dq_k} X_{m+1}^h \frac{dv}{dq_{m+1}} + \dots + X_n^h \frac{dv}{dq_n} = 0, \\ (h = 1, 2, 3, \dots, m).$$

Cette équation, renfermant n variables indépendantes, aura $n - 1$ intégrales indépendantes distinctes v_1, v_2, \dots, v_{n-1} ; et si $k = 1$, on pourra supposer $v_2 = q_2, v_3 = q_3, \dots, v_m = q_m$, puisque ces dernières variables sont considérées comme constantes dans la première équation du système (55). Une fonction quelconque de $v_1, q_2, q_3, \dots, q_m, v_{m+1}, \dots, v_{n-1}$ sera encore une solution de l'équation considérée. Si l'on change alors de variables, et que le système q_1, q_2, \dots, q_n soit remplacé par le suivant : $q_1, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$, les équations du système (55), sauf la première, prendront la forme suivante :

$$(\Delta_h q_1) \frac{dv}{dq_1} + (\Delta_h v_1) \frac{dv}{dv_1} + (\Delta_h v_2) \frac{dv}{dv_2} + \dots + (\Delta_h v_{n-1}) \frac{dv}{dv_{n-1}} = 0, \\ (h = 2, 3, \dots, m).$$

Mais on a, pour les valeurs précédentes de h , $(\Delta_h q_1) = 0$, et par suite le système transformé se compose de $m - 1$ équations avec $n - 1$ variables indépendantes v_1, v_2, \dots, v_{n-1} ; en outre, ce système est de même forme que le précédent, puisque l'on a, pour une valeur quelconque de h ,

$$(\Delta_h v_h) = 0,$$

k pouvant prendre toutes les valeurs de la suite $2, \dots, m$, h étant excepté.

La recherche des solutions communes des équations du premier système revient donc à celle des solutions communes du second, puisque ces dernières ne sont que des fonctions de v_1, v_2, \dots, v_{n-1} , à la condition toutefois que les coefficients des nouvelles équations ne contiennent pas d'autres variables que ces dernières. Cela a lieu en vertu du théorème que nous avons précédemment démontré, puisque $(\Delta_h v_h)$, devant être une solution de l'équation $(\Delta, v) = 0$, ne peut être qu'une fonction des seules quantités v_1, v_2, \dots, v_{n-1} , ce qui justifie ce que nous avons avancé.

Nous pourrions donc raisonner sur ce second système absolument comme nous l'avons fait sur le précédent, et nous passerons de là à un troisième, en prenant pour nouvelles variables $q_2, w_1, w_2, \dots, w_{n-2}$, ces dernières quantités w_1, \dots, w_{n-2} étant les $n-2$ solutions distinctes de la première équation du second système. La variable q_2 disparaîtra complètement de ce nouveau système comme q_1 l'avait fait du précédent, et toute solution commune des équations de ce système sera, pour cette raison, une solution commune des précédents.

En continuant ainsi, on voit que d'un système au suivant le nombre des équations et celui des variables diminuent chacun d'une unité, et qu'on arrivera enfin à une seule équation homogène renfermant $n-m$ variables indépendantes : les $n-m-1$ solutions particulières distinctes de cette équation seront les solutions communes du système proposé; égalées à des constantes, elles constituent la solution complète du problème proposé, et une fonction arbitraire de ces mêmes solutions en sera l'intégrale générale.

Nous allons, pour terminer ce travail, faire sur un exemple particulier l'application des deux méthodes d'intégration des équations linéaires.

§ X. — Applications.

Soit proposé d'intégrer le système suivant :

$$f_1 = 2q_1^2 q_2 \frac{dv}{dq_1} + q_1^2 q_2 \frac{dv}{dq_2} - q_1^2 v = 0,$$

$$f_2 = 2q_2 \frac{dv}{dq_2} - q_1 \frac{dv}{dq_1} - v = 0,$$

$$f_3 = q_2 q_1^2 \frac{dv}{dq_3} + q_1 q_2 q_1 \frac{dv}{dq_1} - q_1 q_2 v = 0.$$

Première méthode. — On fera disparaître la fonction v , tout en laissant les équations linéaires, en posant $u = \log v$; si l'on pose aussi $p_i = \frac{du}{dq_i}$, on aura, pour le système précédent,

$$(x) \quad \begin{cases} f_1 = 2q_1^2 q_2 p_1 + q_1^2 q_2 p_2 - q_1^2 = 0, \\ f_2 = 2q_2 p_2 - q_1 p_1 - 1 = 0, \\ f_3 = q_2 q_1^2 p_3 + q_1 q_2 q_1 p_1 - q_1 q_2 = 0. \end{cases}$$

On vérifie facilement que ces équations satisfont aux conditions d'intégrabilité.

De ces équations, on déduit les valeurs suivantes :

$$(\beta) \quad p_1 = -\frac{q_2^2}{2q_1q_3}p_3 + \frac{q_2^2}{2q_1q_1^2}, \quad p_2 = \frac{q_1}{2q_3}p_1 + \frac{1}{2q_2}, \quad p_3 = -\frac{q_1q_2}{q_2q_1}p_1 + \frac{q_1q_2}{q_2q_1^2},$$

au moyen desquelles on compose le système auxiliaire auquel doit satisfaire la fonction f_1 que, d'après la règle générale, il nous faut déterminer d'abord. Ce système auxiliaire sera le suivant :

$$(\gamma) \quad 0 = \frac{df_1}{dq_1} + \frac{q_2^2}{2q_1q_3} \frac{df_1}{dq_3} + \frac{q_2^2}{2q_1q_1^2} (q_1p_1 - 2) \frac{df_1}{dp_1},$$

$$(\delta) \quad 0 = \frac{df_1}{dq_2} - \frac{q_1}{2q_3} \frac{df_1}{dq_1} + \frac{p_1}{2q_2} \frac{df_1}{dp_1},$$

$$(\varepsilon) \quad 0 = \frac{df_1}{dq_3} + \frac{q_1q_2}{q_2q_1} \frac{df_1}{dq_1} + \frac{q_1q_2}{q_2q_1^2} (q_1p_1 - 2) \frac{df_1}{dp_1}.$$

Pour chercher une solution commune de ces équations, nous partons de l'équation (δ) qui admet la solution particulière $\varphi_1 = p_1q_1$; substituant dans l'équation (ε) , on aura pour résultat

$$\varphi_2 = \frac{2q_1q_2}{q_2q_1^2} (q_1p_1 - 1);$$

substituant de nouveau dans la même équation, on aura pour résultat

$$\varphi_3 = \frac{2q_1}{q_2q_1^2} (q_1p_1 - 1),$$

qui s'exprime au moyen de φ_2 et de q_3 , qui est considéré comme une constante dans l'équation (δ) . Une fonction $\varpi_1(q_3, \varphi_1, \varphi_2)$ sera aussi une solution de l'équation (δ) , et, pour qu'elle satisfasse aussi à l'équation (ε) , il faudra que l'on ait

$$\frac{d\varpi}{dq_1} + \frac{d\varpi}{d\varphi_1} \varphi_2 + \frac{d\varpi}{d\varphi_2} \varphi_3 = 0,$$

d'où

$$\varpi_1 = \frac{\varphi_2^2}{q_3} = \frac{2q_1}{q_2q_1^2} (p_1q_1 - 1).$$

Portant cette valeur dans l'équation (γ) , elle donnera

$$\varpi_2 = \frac{2(p_1 q_1 - 1)}{q_1 q_1^2} = \frac{\varpi_1}{q_1}.$$

Une fonction $\lambda(q_1, \varpi_1)$ sera aussi une solution de l'équation (ε) , ainsi que de l'équation (δ) : elle le sera de l'équation (γ) si l'on a

$$\frac{d\lambda}{dq_1} + \frac{d\lambda}{d\varpi_1} \varpi_1 = 0,$$

d'où

$$\lambda = \frac{\varpi_1}{q_1} = \frac{2(q_1 p_1 - 1)}{q_1 q_1^2}.$$

Posant cette solution du système auxiliaire égale à une constante a , et joignant l'équation ainsi obtenue aux équations données (α) , on en déduira

$$p_1 = -a q_1^2, \quad p_2 = \frac{1}{q_1} + a q_1^2, \quad p_3 = -2a q_1 q_2, \quad p_4 = \frac{1}{q_1} + 2a q_1 q_2,$$

d'où

$$u = \text{const.} + a(q_1 q_1^2 - q_1 q_2^2) + \log q_1 q_2,$$

et par suite

$$v = b q_1 q_2 e^{a(q_1 q_1^2 - q_1 q_2^2)}.$$

Telle est la solution complète du système proposé.

Deuxième méthode. — Si nous rendons les équations proposées homogènes, en suivant pour cela la règle donnée à cet effet, nous obtenons le système suivant :

$$(\beta) \quad (\Delta u) = 2q_1 q_1^2 \frac{du}{dq_1} + q_1^2 q_1 \frac{du}{dq_2} + q_1^2 v \frac{du}{dv} = 0,$$

$$(\gamma) \quad (\Delta_1 u) = 2q_1 \frac{du}{dq_2} - q_1 \frac{du}{dq_1} + v \frac{du}{dv} = 0,$$

$$(\delta) \quad (\Delta_2 u) = q_1 q_1^2 \frac{du}{dq_2} + q_1 q_1 q_1 \frac{du}{dq_1} + q_1 q_1 v \frac{du}{dv} = 0,$$

où u est la nouvelle fonction cherchée, v n'étant plus considéré que comme une variable indépendante.

On trouve immédiatement, pour l'équation (β) , la série suivante de solutions distinctes,

$$u_1 = \frac{\nu}{q_1}, \quad u_2 = q_1, \quad u_3 = q_2, \quad u_4 = \frac{q_1 q_2^2 - q_1 q_3^2}{q_1}.$$

Si l'on prend alors pour variables les quantités suivantes : q_1, u_1, u_2, u_3, u_4 , les équations (γ) et (δ) deviendront

$$(\gamma') \quad (\Delta_1 u) = (\Delta_1 q_1) \frac{du}{dq_1} + (\Delta_1 u_1) \frac{du}{du_1} + (\Delta_1 q_2) \frac{du}{dq_2} + (\Delta_1 q_3) \frac{du}{dq_3} + (\Delta_1 u_4) \frac{du}{du_4} = 0,$$

$$(\delta') \quad (\Delta_2 u) = (\Delta_2 q_1) \frac{du}{dq_1} + (\Delta_2 u_1) \frac{du}{du_1} + (\Delta_2 q_2) \frac{du}{dq_2} + (\Delta_2 q_3) \frac{du}{dq_3} + (\Delta_2 u_4) \frac{du}{du_4} = 0.$$

Mais on a

$$\begin{aligned} (\Delta_1 q_1) &= 0, \quad (\Delta_1 u_1) = 2u_1, \quad (\Delta_1 q_2) = 2q_2, \quad (\Delta_1 q_3) = 0, \quad (\Delta_1 u_4) = -2u_4, \\ (\Delta_2 q_1) &= 0, \quad (\Delta_2 u_1) = 0, \quad (\Delta_2 q_2) = 0, \quad (\Delta_2 q_3) = q_1 q_2^2, \quad (\Delta_2 u_4) = 0; \end{aligned}$$

donc les équations précédentes se réduiront aux suivantes :

$$u_1 \frac{du}{du_1} + q_2 \frac{du}{dq_2} - u_4 \frac{du}{du_4} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{du}{dq_3} = 0.$$

La première de ces équations admet les solutions

$$u'_1 = \frac{u_1}{q_2} = \frac{\nu}{q_1 q_2}, \quad u'_2 = q_2 u_4 = q_1 q_2^2 - q_1 q_3^2;$$

ces solutions, satisfaisant aussi à la dernière équation, sont les solutions communes du système proposé. L'intégrale générale sera donc une fonction arbitraire de u'_1 et u'_2 , d'où l'on aura enfin

$$\nu = q_1 q_2 \varphi(q_1 q_2^2 - q_1 q_3^2),$$

φ étant une fonction arbitraire.

Il est d'ailleurs évident que ce résultat s'accorde avec celui que nous avons déjà obtenu en appliquant aux équations proposées la méthode générale relative aux équations quelconques.

Nous indiquerons encore les exemples suivants.

Soit le système

$$\begin{aligned} (q_1^2 - q_2^2) \frac{dv}{dq_1} - (q_1 q_2 - q_3 q_4) \frac{dv}{dq_2} + (q_2 q_3 - q_1 q_4) \frac{dv}{dq_3} &= 0, \\ (q_1^2 - q_2^2) \frac{dv}{dq_2} + (q_2 q_3 - q_1 q_4) \frac{dv}{dq_3} + (q_1 q_3 - q_2 q_4) \frac{dv}{dq_4} &= 0; \end{aligned}$$

en appliquant la même méthode, on trouvera

$$v = \varphi(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2, q_1 q_2 + q_3 q_4).$$

Soit encore le système suivant

$$\begin{aligned} q_1 \frac{dv}{dq_1} - q_2 \frac{dv}{dq_2} + q_3 \frac{dv}{dq_3} - q_4 \frac{dv}{dq_4} &= 0, \\ q_3 \frac{dv}{dq_1} + q_4 \frac{dv}{dq_2} - q_1 \frac{dv}{dq_3} - q_2 \frac{dv}{dq_4} &= 0. \end{aligned}$$

Pour l'application de la seconde méthode, il faut remplacer ce système par le suivant, qui lui est équivalent,

$$\begin{aligned} (q_1 q_2 + q_3 q_4) \frac{dv}{dq_1} + (q_3 q_4 - q_1 q_2) \frac{dv}{dq_2} - (q_1^2 + q_2^2) \frac{dv}{dq_3} &= 0, \\ (q_1 q_2 + q_3 q_4) \frac{dv}{dq_2} - (q_1^2 + q_2^2) \frac{dv}{dq_3} + (q_3 q_4 - q_1 q_2) \frac{dv}{dq_4} &= 0; \end{aligned}$$

et la solution générale de ce système est la suivante :

$$v = \varphi \left[(q_1^2 + q_2^2)(q_3^2 + q_4^2), \frac{q_1 q_2 + q_3 q_4}{q_3 q_4 - q_1 q_2} \right].$$



DU FACTEUR INTÉGRANT

POUR LES EXPRESSIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

RENFERMANT UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES INDÉPENDANTES;

PAR M. COLLET,

DOCTEUR ÈS SCIENCES.

Dans le Mémoire précédent, nous avons développé une méthode générale pour l'intégration des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre; nous nous proposons actuellement d'appliquer cette méthode à la recherche du facteur intégrant des expressions différentielles du premier ordre et d'un nombre quelconque de variables indépendantes. Ce facteur n'existe pas en général pour des expressions quelconques : cette existence est subordonnée à certaines conditions qui doivent être satisfaites par l'expression proposée, et dont l'étude va nous occuper tout d'abord.

§ I. — *Des conditions nécessaires dont dépend l'existence du facteur intégrant.*

Considérons l'expression

$$(1) \quad X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_k dx_k + \dots + X_n dx_n,$$

et soit μ la fonction par laquelle il faut la multiplier pour qu'elle devienne une différentielle exacte; les conditions nécessaires et suffisantes

pour que cela ait lieu sont que l'on ait identiquement, pour toutes les valeurs de h et de k , depuis 1 jusqu'à n ,

$$\frac{d \cdot \mu X_h}{dx_k} = \frac{d \cdot \mu X_k}{dx_h},$$

c'est-à-dire, en développant,

$$(2) \quad X_h \frac{d\mu}{dx_k} - X_k \frac{d\mu}{dx_h} + \mu \left(\frac{dX_h}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_h} \right) = 0.$$

En donnant à h et k toutes les valeurs de la suite 1, 2, ..., n , la formule (2) donnera $\frac{n(n-1)}{2}$ équations aux dérivées partielles, et qui devront être satisfaites simultanément par la fonction cherchée. Il est facile de voir que les équations qui précèdent ne peuvent exister simultanément, à moins que leurs coefficients ne satisfassent identiquement à de certaines conditions qui seront des conditions nécessaires pour l'existence du facteur.

Pour cela, posons, en général,

$$[h, k] = X_h \frac{d\mu}{dx_k} - X_k \frac{d\mu}{dx_h} + \mu \left(\frac{dX_h}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_h} \right),$$

et considérons les trois équations

$$[h, k] = 0, \quad [k, m] = 0, \quad [m, h] = 0;$$

en les multipliant respectivement par X_m , X_h , X_k et ajoutant, on obtient, après la suppression du facteur commun k , l'égalité suivante :

$$(3) \quad X_k \left(\frac{dX_h}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_k} \right) + X_h \left(\frac{dX_m}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_m} \right) + X_m \left(\frac{dX_k}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_k} \right) = 0.$$

Cette égalité, ne contenant plus la fonction cherchée, doit être une identité, sans quoi elle établirait une dépendance entre les variables, qui, par hypothèse, sont indépendantes.

Si, dans la formule (3), on donne à h , k , m toutes les valeurs de la suite 1, 2, ..., n , on obtiendra des conditions nécessaires pour l'existence du facteur.

Supposons ces conditions satisfaites, le nombre des équations (2) distinctes est alors diminué. En effet, ayant montré que l'équation $[h, k] = 0$ est une conséquence des deux autres $[m, h] = 0$, $[m, k] = 0$, on voit qu'on aura un système complet d'équations distinctes et comprenant toutes les autres, en prenant pour m une valeur quelconque de la suite $1, 2, \dots, n$, et donnant simplement à h , dans le symbole $[m, h] = 0$, toutes les autres valeurs de cette suite.

On pourrait former de bien des manières des systèmes complets et équivalents d'équations distinctes, par exemple en écrivant dans un ordre quelconque les nombres de la suite $1, 2, \dots, n$, et prenant pour m et h , dans $[m, h] = 0$, tous les systèmes de deux nombres consécutifs de cette suite; et plus généralement, en prenant un système tellement composé, qu'il y entre les dérivées de μ par rapport à toutes les variables. Quelle que soit la marche suivie, on arrive à ce résultat, que le nombre des équations auxquelles le facteur intégrant μ doit satisfaire est réduit à $n - 1$, au moyen des conditions (3) énoncées comme nécessaires.

Revenons à ces conditions. Si, dans la formule (3), on donne à m, k, h toutes les valeurs $1, 2, \dots, n$, on forme $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ conditions : nous allons démontrer que ces conditions ne sont pas toutes distinctes, et que le nombre de ces dernières est seulement égal à $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Pour cela, représentons, pour plus de simplicité, par le symbole $[h, k, m]$ le premier membre de la formule (3), on aura évidemment

$$[h, k, m] = [k, m, h] = [m, h, k],$$

et aussi

$$[h, k, m] = -[h, m, k].$$

Nous allons démontrer, en général, que les trois conditions

$$[h, k, m] = 0, \quad [k, p, m] = 0, \quad [p, h, m] = 0,$$

comprennent la suivante :

$$[h, k, p] = 0.$$

En effet, si l'on développe les trois premières conditions, qu'on mul-

multiplie les équations obtenues respectivement par X_p , X_h , X_k , et qu'on ajoute, on voit facilement que les coefficients des produits $X_h X_k$, $X_k X_p$, $X_p X_h$ s'annulent identiquement, et que celui de X_m est l'expression suivante :

$$X_h \left(\frac{dX_k}{dx_p} - \frac{dX_p}{dx_h} \right) + X_k \left(\frac{dX_p}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_p} \right) + X_p \left(\frac{dX_h}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_h} \right),$$

qui, par conséquent, sera nulle; ce qui nous donne la condition $[h, k, p] = 0$, qui, ainsi que nous l'avions annoncé, n'est qu'une conséquence des précédentes.

Il résulte donc de cela que l'on aura toutes les conditions distinctes en donnant simplement à h et k , dans l'équation symbolique $[m, h, k] = 0$, toutes les valeurs de la suite $1, 2, \dots, n, m$ excepté, et le système ainsi obtenu représentera toutes les conditions nécessaires à l'existence du facteur. Nous verrons dans la suite que ces mêmes conditions expriment précisément les conditions d'intégrabilité des équations aux différentielles partielles que l'on aura à intégrer simultanément pour la détermination du facteur : *les conditions qui précèdent sont donc à la fois nécessaires et suffisantes*. Le nombre de ces conditions est maintenant égal à $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$; et si $n = 2$, c'est-à-dire s'il n'y a que deux variables indépendantes, il n'y a plus de conditions, et alors le facteur intégrant existe toujours.

§ II. — Conditions d'intégrabilité des équations dont dépend la détermination du facteur.

Considérons maintenant les équations à intégrer, et dont (2) est la formule générale; elles renferment la fonction cherchée et ses dérivées prises par rapport aux variables x_1, x_2, \dots, x_n . On peut faire disparaître la fonction en suivant la méthode générale qui consiste à poser $\mu = \frac{\psi}{t}$, ψ étant une nouvelle fonction et t une nouvelle variable; mais il est ici plus simple de poser $\mu = e^z$, d'où $\frac{d\mu}{dx_k} = e^z \frac{dz}{dx_k}$, ce qui a l'avantage de ne pas introduire de variable nouvelle. Posant $\frac{dz}{dx_k} = p_k$, les

équations à intégrer prennent alors la forme suivante :

$$(4) \quad f_m = X_1 p_m - X_m p_1 + \frac{dX_1}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_1} = 0,$$

où m devra prendre successivement les valeurs $2, 3, \dots, n$.

Nous allons démontrer que les fonctions f_2, f_3, \dots, f_n satisfont aux conditions d'intégrabilité, si les premières conditions sont elles-mêmes satisfaites.

Si nous considérons deux quelconques des équations proposées,

$$(5) \quad \begin{cases} f_m = X_1 p_m - X_m p_1 + \frac{dX_1}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_1} = 0, \\ f_h = X_1 p_h - X_h p_1 + \frac{dX_1}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_1} = 0, \end{cases}$$

on devra avoir

$$(f_m, f_h) = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{df_m}{dp_k} \frac{df_h}{dx_k} - \frac{df_m}{dx_k} \frac{df_h}{dp_k} \right) = 0.$$

Pour le prouver, des équations (5) nous tirons

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{df_m}{dp_1} = -X_m, & \frac{df_m}{dp_m} = X_1, & \frac{df_m}{dp_2} = \frac{df_m}{dp_3} = \dots = \frac{df_m}{dp_n} = 0; \\ \frac{df_h}{dp_1} = -X_h, & \frac{df_h}{dp_h} = X_1, & \frac{df_h}{dp_2} = \frac{df_h}{dp_3} = \dots = \frac{df_h}{dp_n} = 0; \end{cases}$$

et l'expression de (f_m, f_h) se réduit simplement aux termes suivants :

$$(7) \quad \frac{df_m}{dp_1} \frac{df_h}{dx_1} + \frac{df_m}{dp_m} \frac{df_h}{dx_m} - \frac{df_m}{dx_1} \frac{df_h}{dp_1} - \frac{df_m}{dx_m} \frac{df_h}{dp_m}.$$

On aura aussi

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{df_m}{dx_1} = p_m \frac{dX_1}{dx_1} - p_1 \frac{dX_m}{dx_1} + \frac{d}{dx_1} \left(\frac{dX_1}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_1} \right), \\ \frac{df_m}{dx_h} = p_m \frac{dX_1}{dx_h} - p_1 \frac{dX_m}{dx_h} + \frac{d}{dx_h} \left(\frac{dX_1}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_1} \right), \\ \frac{df_h}{dx_1} = p_h \frac{dX_1}{dx_1} - p_1 \frac{dX_h}{dx_1} + \frac{d}{dx_1} \left(\frac{dX_1}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_1} \right), \\ \frac{df_h}{dx_m} = p_h \frac{dX_1}{dx_m} - p_1 \frac{dX_h}{dx_m} + \frac{d}{dx_m} \left(\frac{dX_1}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_1} \right). \end{cases}$$

En portant dans l'expression (7) les valeurs (6) et (8), on aura un résultat de la forme

$$(9) \quad Pp_1 + Qp_h + Rp_m + S,$$

P, Q, R, S ayant les valeurs suivantes :

$$P = X_1 \left(\frac{dX_h}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_h} \right) + X_h \frac{dX_m}{dx_1} - X_m \frac{dX_h}{dx_1},$$

$$Q = X_m \frac{dX_1}{dx_1} - X_1 \frac{dX_m}{dx_m},$$

$$R = -X_h \frac{dX_1}{dx_1} + X_1 \frac{dX_h}{dx_h},$$

$$S = X_1 \frac{d}{dx_1} \left(\frac{dX_h}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_h} \right) + X_h \frac{d}{dx_1} \left(\frac{dX_m}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx_m} \right) + X_m \frac{d}{dx_1} \left(\frac{dX_1}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_1} \right).$$

Considérons maintenant les équations (5) et la suivante :

$$X_m p_h - X_h p_m + \frac{dX_m}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_m} = 0,$$

qui en est une conséquence, quand on suppose la condition

$$[1, h, m] = 0$$

satisfaite; multiplions ces équations respectivement par

$$\begin{aligned} & \frac{dX_h}{dx_1} + \left(\frac{dX_1}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_1} \right), \\ & - \frac{dX_m}{dx_1} - \left(\frac{dX_1}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_1} \right), \end{aligned}$$

et

$$\frac{dX_1}{dx_1};$$

en ajoutant les résultats, on aura une identité de la forme

$$(10) \quad P'p_1 + Q'p_h + R'p_m + S' = 0.$$

Pour les quantités P', Q', R', S', on trouve facilement, en faisant usage

de la condition (9), les valeurs

$$P' = P, \quad Q' = Q, \quad R' = R,$$

$$S' = -\frac{dX_1}{dx_1} \left(\frac{dX_h}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_h} \right) - \frac{dX_h}{dx_1} \left(\frac{dX_m}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx_m} \right) - \frac{dX_m}{dx_1} \left(\frac{dX_1}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_1} \right).$$

Si enfin on dérive l'équation (9) par rapport à x_1 , on trouve, par une transposition convenable des termes obtenus, que

$$S' = S,$$

d'où il suit que l'on a bien l'identité

$$P p_1 + Q p_h + R p_m + S = 0,$$

qui n'est autre que la condition d'intégrabilité

$$(f_h f_m) = 0,$$

qui est ainsi satisfaite, pour toutes les valeurs de h et de m , quand l'expression proposée satisfait d'ailleurs à toutes les conditions $[m, h, p] = 0$.
Donc ces dernières conditions sont bien à la fois nécessaires et suffisantes.

Nous nous occuperons encore de ces conditions dans la suite; actuellement nous allons indiquer la marche à suivre pour intégrer les équations dont dépend la solution du problème en question.

§ III. — Intégration des équations du facteur.

Les équations du facteur sont aux dérivées partielles du premier ordre, linéaires mais non homogènes. Pour les intégrer, on peut suivre les deux méthodes que nous avons indiquées : la méthode générale des équations quelconques, ou la méthode particulière aux équations linéaires. L'emploi de cette dernière méthode exigera l'introduction d'une nouvelle variable. Nous allons les considérer l'une et l'autre successivement.

Première méthode. — La méthode générale se ramène, pour le problème actuel, à chercher une relation $f = a$ entre les quantités p_1, \dots ,

p_n, x_1, \dots, x_n, a étant une constante, de telle sorte que l'on puisse, au moyen de cette relation et des $(n - 1)$ équations

$$(11) \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0, \dots, \quad f_n = 0,$$

déterminer, pour p_1, p_2, \dots, p_n , des valeurs en fonction de x_1, x_2, \dots, x_n qui rendent l'expression

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n$$

une différentielle. L'intégrale de cette différentielle sera la fonction z , qui donne immédiatement la valeur complète du facteur μ , à cause de la relation $\mu = e^z$.

Si des équations (11) on tire les valeurs de p_2, p_3, \dots, p_n en fonction de $p_1, x_1, x_2, \dots, x_n$, on pourra supposer que la relation cherchée $f = a$ ne contienne aussi que p_1, x_1, \dots, x_n ; dans cette hypothèse, la fonction f doit être une solution commune d'un système canonique de $n - 1$ équations linéaires, aux dérivées partielles, de la forme suivante :

$$(12) \quad 0 = \frac{df}{dx_m} + \frac{dp_m}{dx_1} \frac{df}{dp_1} - \frac{dp_m}{dp_1} \frac{df}{dx_1},$$

où m recevra successivement les valeurs $2, 3, \dots, n$. Des équations (11) on déduit, pour p_2, p_3, \dots, p_n , des valeurs de la forme

$$(13) \quad p_m = \frac{X_m}{X_1} p_1 + \frac{1}{X_1} \left(\frac{dX_m}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx_m} \right),$$

et l'équation générale (12) devient alors

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= X_1^2 \frac{df}{dx_m} - X_1 X_m \frac{df}{dx_1} \\ &+ \left[\left(X_1 \frac{dX_m}{dx_1} - X_m \frac{dX_1}{dx_1} \right) p_1 - X_1 \frac{d}{dx_1} \left(\frac{dX_1}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_1} \right) + \frac{dX_1}{dx_1} \left(\frac{dX_1}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_1} \right) \right] \frac{df}{dp_1}. \end{aligned} \right.$$

Mais, sans diminuer en rien la généralité de la question, on peut supposer $X_1 = 1$, ce qui revient à comprendre la fonction X_1 dans le facteur cherché. Cette hypothèse simplifie toutes les formules. Les conditions d'intégrabilité se réduisent à la forme suivante :

$$0 = \frac{dX_h}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_h} + X_h \frac{dX_m}{dx_1} - X_m \frac{dX_h}{dx_1};$$

et les égalités (13) et (14) deviennent respectivement

$$(15) \quad p_m = p_1 X_m + \frac{dX_m}{dx_1},$$

$$(16) \quad 0 = \frac{df}{dx_m} - X_m \frac{df}{dx_1} + \left(p_1 \frac{dX_m}{dx_1} + \frac{d^2 X_m}{dx_1^2} \right) \frac{df}{dp_1}.$$

Dans toutes ces formules, m doit prendre successivement les valeurs 2, 3, ..., n .

Nous remarquerons que les équations (15) et (16) ne contiennent chacune que l'une des fonctions X_2, \dots, X_n . Le système auxiliaire (16) s'intégrera en suivant la marche que nous avons indiquée; aussi ne nous arrêterons-nous sur cette partie de la question que pour signaler quelques particularités qui peuvent se présenter dans la recherche de la solution commune de ces équations.

Et d'abord on voit immédiatement que, s'il ne s'agissait que de trouver une solution commune, quelconque d'ailleurs, des équations du système (16), on pourrait satisfaire à ces équations par une fonction indépendante de p_1 qui serait alors une solution commune des équations (16) réduites à la forme

$$0 = \frac{df}{dx_m} - X_m \frac{df}{dx_1}.$$

Pour trouver une telle solution, on considérera d'abord une solution $f = \varphi$ de l'équation

$$0 = \frac{df}{dx_2} - X_2 \frac{df}{dx_1};$$

cette solution ne contenant pas p_1 , on voit que, en effectuant les substitutions successives qui conduisent à la solution commune cherchée, la quantité p_1 n'apparaîtra nulle part, et qu'on aura enfin une fonction $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ qui sera une solution commune des équations du système considéré. On doit alors se demander ce que représente cette fonction, et voir si elle peut satisfaire aux équations (15), auquel cas elle serait la solution immédiate de la question, sans qu'il soit alors nécessaire d'effectuer la quadrature qui se présente dans la méthode générale. A cela, on peut répondre que la fonction φ , quoique satisfaisant aux équations (16), n'en est pas pour cela une solution de la question, car

elle ne satisfait pas aux équations (15). En effet, la fonction φ donne en général

$$0 = \frac{d\varphi}{dx_m} - X_m \frac{d\varphi}{dx_1},$$

et, comme il faudrait que l'on eût

$$0 = \frac{d\varphi}{dx_m} - X_m \frac{d\varphi}{dx_1} - \frac{dX_m}{dx_1},$$

on voit que la fonction φ ne satisfera à la question qu'autant que l'on aura $\frac{dX_m}{dx_1} = 0$, pour toutes les valeurs de m , c'est-à-dire seulement dans le cas où la variable x_1 n'entrera pas dans la composition des fonctions X_2, X_3, \dots, X_n . Mais, dans ce cas, les conditions d'intégrabilité deviennent, pour les valeurs 2, 3, ..., n de m et de h ,

$$\frac{dX_m}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_m} = 0;$$

par conséquent, la partie

$$X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n$$

de l'expression proposée est alors une différentielle exacte, et, comme $X_1 = 1$, l'expression proposée est immédiatement intégrable, et il n'y a pas lieu de chercher de facteur.

Ce cas particulier étant excepté, on aura, pour solution commune du système (16), une fonction f de $p_1, x_1, x_2, \dots, x_n$; et, posant $f = a$, a étant une constante, on aura, au moyen de cette équation et des formules (15), les valeurs de p_1, p_2, \dots, p_n exprimées en fonction des variables indépendantes x_1, \dots, x_n , et d'une constante arbitraire a : ces valeurs seront telles, qu'en formant l'expression

$$p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n,$$

on aura une différentielle exacte, dont l'intégrale sera précisément la fonction z que nous avons substituée au facteur μ dans les équations du problème. De la valeur complète

$$z = F(x_1, x_2, \dots, x_n, a) + b,$$

on déduira la solution complète du facteur intégrant

$$\mu = \beta e^{F(x_1, \dots, x_n, a)},$$

β étant, ainsi que b , une constante arbitraire. La solution générale sera définie par le système

$$\mu = \varphi(a) e^{F(x_1, \dots, x_n, a)}, \quad 0 = \varphi'(a) e^{F(x_1, \dots, x_n, a)} + \frac{dF}{da} \varphi(a) e^{F(x_1, \dots, x_n, a)};$$

et enfin les solutions singulières résulteront de l'élimination de a entre les deux équations

$$\mu = \beta e^{F(x_1, \dots, x_n, a)}, \quad \text{et} \quad \frac{dF}{da} = 0.$$

Telle est la marche à suivre dans la recherche du facteur, d'après la méthode générale d'intégration des équations quelconques. Nous allons maintenant considérer la méthode qui est spéciale aux équations linéaires.

Deuxième méthode. — La méthode d'intégration particulière aux équations linéaires suppose ces dernières homogènes et débarrassées de la fonction cherchée.

Si nous considérons les équations (2), nous leur donnerons la forme convenable, non plus en nous proposant la détermination de μ , mais celle d'une fonction u de x_1, x_2, \dots, x_n et de μ ; ces équations prennent alors la forme

$$(17) \quad 0 = X_1 \frac{du}{dx_n} - X_n \frac{du}{dx_1} + \mu \left(\frac{dX_1}{dx_n} - \frac{dX_n}{dx_1} \right) \frac{d\mu}{d\mu};$$

et même, en supposant, comme précédemment, que $X_1 = 1$, on aura le système suivant :

$$(18) \quad 0 = \frac{du}{dx_n} - X_n \frac{du}{dx_1} - \mu \frac{dX_n}{dx_1} \frac{d\mu}{d\mu},$$

$$(m = 2, 3, \dots, n);$$

et si nous posons, en général,

$$(\Delta_n u) = \frac{du}{dx_n} - X_n \frac{du}{dx_1} - \mu \frac{dX_n}{dx_1} \frac{d\mu}{d\mu},$$

les équations du système (18) deviendront les suivantes :

$$(\Delta_1 u) = 0, \quad (\Delta_2 u) = 0, \dots, \quad (\Delta_n u) = 0.$$

Ceci posé, nous avons d'abord à chercher les solutions particulières de l'équation $(\Delta_2 u) = 0$. Pour cela, l'une d'elles u' étant déterminée, on pourra, pour déterminer la seconde u'' , faire l'application du théorème démontré dans le § VIII (Mémoire précédent). Quoi qu'il en soit, quand on connaîtra les deux solutions particulières u' et u'' de la première des équations (18) on changera de variables en exprimant μ , x_1 , x_2 , x_3, \dots, x_n en fonction de x_2 , x_3, \dots, x_n , u' , u'' ; l'une quelconque des équations suivantes $(\Delta_m u) = 0$ deviendra

$$0 = (\Delta_m x_2) \frac{du}{dx_2} + \dots + (\Delta_m x_n) \frac{du}{dx_n} + (\Delta_m u') \frac{du}{du'} + (\Delta_m u'') \frac{du}{du''},$$

en remarquant que $(\Delta_m x_2) = 0$ pour les valeurs 2, 3, ..., n de m ; enfin, eu égard aux conditions $(\Delta_m x_k) = 0$, pour $m \leq k$ et $(\Delta_m x_m) = 1$, on aura, pour l'une des équations transformées,

$$(19) \quad 0 = \frac{du}{dx_m} + (\Delta_m u') \frac{du}{du'} + (\Delta_m u'') \frac{du}{du''},$$

m devant prendre successivement les valeurs 3, 4, ..., n .

Ce dernier système, qui satisfait d'ailleurs, comme le précédent, aux conditions d'intégrabilité (Mémoire précédent, § II, *Remarque II*), jouit de cette propriété, que toute solution commune des équations (18) est solution commune des équations de ce dernier système; et réciproquement, que toute solution commune des équations du système (19) satisfait aux équations (18). Ce système (19), ayant la même forme que le précédent, se traitera comme lui, et, si l'on trouve les deux solutions particulières distinctes u'_1 , u''_1 , pour la première des équations (19), on remplacera les variables x_3 , x_4, \dots, x_n , u' , u'' en fonction des suivantes: x_3 , x_4, \dots, x_n , u'_1 , u''_1 ; x_3 disparaissant d'ailleurs identiquement du résultat, comme cela est arrivé pour x_2 dans la première transformation. En opérant ainsi successivement, on voit que le nombre des équations de chaque système diminue d'une unité en passant d'un système au suivant, et que le nombre des variables subit la même réduction; on arrivera donc enfin à une seule équation à trois variables de la forme

$$0 = A \frac{du}{dx_n} + B \frac{du}{du'_{n-2}} + C \frac{du}{du''_{n-2}},$$

et dont on cherchera les deux solutions particulières u'_{n-1} , u''_{n-1} . Revenant aux variables primitives, on aura, en égalant ces deux solutions à des constantes, la solution complète du problème proposé; la solution générale sera une fonction quelconque de u'_{n-1} , u''_{n-1} , qui, égalée à zéro, donnera la valeur du facteur intégrant μ .

Si nous comparons les deux méthodes que nous venons d'indiquer, nous voyons que la première ne nécessite la recherche que d'une solution commune des équations d'un seul système auxiliaire, tandis que la seconde exige la formation de $n - 2$ systèmes auxiliaires successifs, et pour chacun d'eux la solution complète de l'une de ses équations. Ce qui caractérise la seconde méthode, c'est qu'elle donne le facteur sous une forme semblable à celle qui lui convient en général, d'après les théorèmes que nous allons maintenant démontrer.

§ IV. — *Propriétés générales du facteur intégrant.*

LEMME. — Si U et u sont deux fonctions de n variables x_1, x_2, \dots, x_n , et telles que l'on ait, pour chacune de ces variables,

$$\frac{dU}{dx_k} = \lambda \frac{du}{dx_k},$$

λ étant une fonction donnée de x_1, x_2, \dots, x_n , ou plus simplement

$$dU = \lambda du;$$

alors U est seulement une fonction de u .

Supposons, en effet, que, dans $U = F(x_1, \dots, x_n)$, on remplace x_n par sa valeur tirée de l'égalité $u = f(x_1, \dots, x_n)$, le résultat sera en général de la forme

$$U = F_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u).$$

Je dis que, dans le cas actuel, les variables x_1, x_2, \dots, x_{n-1} sont éliminées en même temps que x_n .

Différentions, en effet, la fonction U par rapport à x_1, \dots, x_{n-1}, x_n .

la substitution indiquée étant supposée effectuée, nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dx_1} &= \frac{dF_1}{dx_1} + \frac{dF_1}{du} \frac{du}{dx_1}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \frac{dU}{dx_{n-1}} &= \frac{dF_{n-1}}{dx_{n-1}} + \frac{dF_{n-1}}{du} \frac{du}{dx_{n-1}}, \\ \frac{dU}{dx_n} &= \frac{dF_n}{du} \frac{du}{dx_n}.\end{aligned}$$

Mais, par hypothèse, $\frac{dU}{dx_n} = \lambda \frac{du}{dx_n}$; d'où l'on aura, en comparant avec les valeurs qui précèdent,

$$\lambda = \frac{dF_1}{du}, \quad \text{puis} \quad \frac{dF_1}{dx_1} = 0, \quad \frac{dF_1}{dx_2} = 0, \dots, \quad \frac{dF_1}{dx_{n-1}} = 0, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Ceci pouvait être établi beaucoup plus simplement, en considérant que l'égalité $dU = \lambda du$ exprime que U reste constant quand x_1, x_2, \dots, x_n varient de façon à laisser u constant, et que U ne variera qu'autant que u variera aussi : donc U n'est qu'une fonction de u .

THÉORÈME. — *Il existe une infinité de valeurs pour le facteur intégrant de l'expression*

$$X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n.$$

Si μ est une valeur du facteur, on aura

$$\mu(X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n) = du;$$

multipliant les deux membres de cette égalité par une fonction arbitraire de u , $\varphi(u)$, on aura

$$\varphi(u) \mu(X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n) = \varphi(u) du,$$

qui est encore une différentielle exacte.

Il y a donc une infinité de valeurs du facteur de la forme $\mu\varphi(u)$.

RÉCIPROQUEMENT. — *Toutes les valeurs du facteur sont de la forme $\mu\varphi(u)$, μ étant l'une quelconque d'entre d'elles.*

Soit, en effet, une valeur V du facteur, on aura

$$V(X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n) = dU;$$

d'ailleurs, par hypothèse,

$$\mu(X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n) = du;$$

d'où

$$\frac{dU}{du} = \frac{V}{\mu};$$

et, par conséquent, $\frac{V}{\mu}$ sera une fonction de u seulement. La formule générale du facteur intégrant est donc

$$\mu = \mu_1 \varphi(u),$$

μ_1 étant une valeur particulière de ce facteur, et u la fonction dont l'expression proposée devient la différentielle, quand on la multiplie par μ_1 .

COROLLAIRE. — Si l'on peut obtenir deux valeurs du facteur, leur rapport sera l'intégrale cherchée, ou plutôt une valeur de cette intégrale.

§ V. — *Remarques relatives aux théories précédentes. — Cas particulier où le facteur est décomposable en un produit de fonctions.*

La marche que nous avons suivie pour arriver à la détermination du facteur peut facilement être modifiée; elle est seulement la plus simple en général. On pourrait, en effet, remplacer le système d'équations dont nous sommes partis par $(n-1)$ équations fournies par le symbole $[h, k] = 0$, h et k prenant des valeurs de la suite $1, 2, \dots, n$, et de telle sorte que chaque nombre de cette suite soit pris au moins une fois; car alors le système des $(n-1)$ équations obtenues renfermera les dérivées de μ par rapport à toutes les variables. Mais on voit immédiatement que la détermination de $(n-1)$ des quantités p_1, \dots, p_n en fonction de la dernière et des variables indépendantes exigera des

substitutions qui compliqueront les résultats obtenus, et par suite les calculs ultérieurs. Ce n'est que dans des cas très-particuliers, par exemple dans celui où l'on a, entre quelques-unes des fonctions X_1, \dots, X_n , des relations telles que la suivante :

$$\frac{dX_m}{dx_k} = \frac{dX_k}{dx_m},$$

qu'il pourra y avoir intérêt à modifier dans le sens que nous venons d'indiquer la marche générale des opérations; et l'on voit facilement comment il faudra choisir les valeurs de h et k dans le symbole $[h, k] = 0$, pour apporter aux calculs la plus grande simplification possible; aussi ne nous arrêterons-nous pas plus longtemps sur ce sujet.

Nous nous proposons actuellement d'étudier le cas remarquable où le facteur intégrant est décomposable en un produit de fonctions ne contenant chacune qu'une seule variable, c'est-à-dire le cas où l'on a

$$\mu = z_1 z_2 \dots z_n,$$

z_1 étant une fonction de x_1 seulement, z_2 , de x_2, \dots . En nous reportant au changement de variable que nous avons opéré pour appliquer la théorie générale de l'intégration aux cas des équations du facteur, on trouvera, dans l'hypothèse actuelle,

$$p_1 = \frac{1}{z_1} \frac{dz_1}{dx_1}, \quad p_2 = \frac{1}{z_2} \frac{dz_2}{dx_2}, \dots, \quad p_m = \frac{1}{z_m} \frac{dz_m}{dx_m}, \dots, \quad p_n = \frac{1}{z_n} \frac{dz_n}{dx_n}.$$

Les $p_1, p_2, \dots, p_m, \dots, p_n$ devant d'ailleurs satisfaire aux équations de la forme

$$X_1 p_m - X_m p_1 + \frac{dX_1}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_1} = 0,$$

il faudra que l'on puisse avoir

$$X_1 \left(\frac{1}{z_m} \frac{dz_m}{dx_m} \right) - X_m \left(\frac{1}{z_1} \frac{dz_1}{dx_1} \right) = \frac{dX_m}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx_m};$$

mais le premier membre de cette équation peut se représenter par

$$(20) \quad X_1 \varphi_m(x_m) - X_m \varphi_1(x_1);$$

donc on ne pourra obtenir pour μ une fonction décomposable en facteurs de la forme supposée qu'autant que $\frac{dX_m}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx_m}$ pourra aussi se mettre sous cette forme (20); et il faudra non-seulement que cette décomposition soit possible pour toutes les valeurs de l'indice m , mais encore que les valeurs fournies par les différentes décompositions, pour $\varphi_1(x_1)$, soient identiques.

Telles sont les conditions nécessaires et suffisantes qui doivent être remplies par les fonctions X_1, X_2, \dots, X_n pour que le facteur intégrant soit de la forme supposée.

Plus généralement, si l'on partait des équations fournies par le symbole $[h, k] = 0$, où h et k prennent des valeurs quelconques de la suite $1, 2, \dots, n$, l'une quelconque d'entre elles,

$$X_h p_k - X_k p_h + \frac{dX_h}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_h} = 0,$$

conduirait à la condition

$$(21) \quad \frac{dX_k}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_k} = X_h \left(\frac{1}{z_k} \frac{dz_k}{dx_h} \right) - X_k \left(\frac{1}{z_h} \frac{dz_h}{dx_k} \right),$$

c'est-à-dire qu'il faudrait que la quantité

$$\frac{dX_k}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_k},$$

pût se mettre sous la forme

$$X_h \varphi_k(x_k) - X_k \varphi_h(x_h),$$

et, en outre, que toutes les valeurs de $\varphi_k(x_k)$, par exemple, fussent identiquement les mêmes pour toutes les décompositions analogues à la précédente. Si toutes ces conditions sont remplies, il existera un facteur intégrant de la forme

$$\mu = z_1 z_2 \dots z_m \dots z_n,$$

où z_m est seulement fonction de x_m , et les calculs qui précèdent auront déterminé en même temps les valeurs des fonctions

$$\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_m(x_m), \dots, \varphi_n(x_n).$$

Si nous considérons les dernières conditions répondant aux équations $[h, k] = 0$, elles sont évidemment plus nombreuses que celles fournies par les équations désignées par le symbole $[1, k] = 0$; mais cette plus grande multiplicité n'est qu'apparente, et, si les conditions répondant aux équations $[1, k] = 0$ sont satisfaites, celles qui sont relatives aux équations $[h, k] = 0$, pour toutes les valeurs de h et de k , le seront en même temps. Ce fait, qui pourrait être établi directement, résulte d'ailleurs immédiatement de cette considération, que les équations fournies par le symbole $[1, k] = 0$, où k prend les valeurs 2, 3, ..., n , comprennent toutes les autres. Mais, sans nous étendre davantage sur ce point, revenons à la détermination des fonctions x_1, x_2, \dots, x_n .

Les décompositions précédentes nous ayant donné les valeurs de $\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_m(x_m), \dots, \varphi_n(x_n)$, nous aurons, en général, pour la détermination de z_m ,

$$\frac{1}{z_m} \frac{dz_m}{dx_m} = \varphi_m(x_m),$$

d'où

$$z_m = c e^{\int \varphi_m(x_m) dx_m},$$

c étant une constante; et, par suite, pour le facteur intégrant, on aura immédiatement

$$\mu = A e^{\sum_{m=1}^{m=n} \int \varphi_m(x_m) dx_m},$$

en représentant par A une constante quelconque.

Nous remarquons immédiatement que, si toutes les conditions de décomposition en facteurs sont satisfaites, il pourra manquer certaines variables dans le facteur intégrant, dans le cas où quelques-unes des fonctions X_1, \dots, X_n satisfont aux conditions

$$(22) \quad \frac{dX_h}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_h} = 0.$$

Supposons en particulier qu'il n'y ait que cette condition de satisfaite; en considérant l'équation

$$X_h p_k - X_k p_h + \frac{dX_h}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_h} = 0,$$

dans l'hypothèse actuelle, elle conduira à cette condition

$$\frac{dX_k}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_k} = X_k \varphi_k(x_k) - X_k \varphi_k(x_k) = 0,$$

qui pourra être satisfaite en posant

$$\varphi_k(x_k) = 0, \quad \varphi_k(x_k) = 0;$$

si les autres décompositions donnent les mêmes résultats pour φ_k et φ_k , les variables x_k et x_k feront défaut dans la valeur de μ .

Mais il peut manquer certaines variables dans μ , sans pour cela que les fonctions X_1, \dots, X_n satisfassent à aucune des conditions (22). Supposons, par exemple, que $\varphi_1(x_1) = 0$; on devra alors avoir, pour les valeurs 2, 3, ..., n de l'indice m ,

$$(23) \quad \frac{\frac{dX_1}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_1}}{X_1} = \varphi_m(x_m),$$

c'est-à-dire que la fonction représentée par le premier membre de cette équation doit se réduire à une fonction de x_m . Telles sont les $n - 1$ conditions qui doivent être satisfaites pour que la variable x_1 n'entre pas dans la fonction μ , supposée d'ailleurs décomposable en facteurs.

Si nous cherchons ce que deviennent les conditions d'intégrabilité quand on suppose satisfaites les conditions de la décomposition en facteurs, on voit que ces dernières comprennent les premières, c'est-à-dire que, si pour deux quelconques des fonctions données on a

$$(24) \quad \frac{dX_k}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_k} = X_k \varphi_k(x_k) - X_k \varphi_k(x_k),$$

les fonctions $\varphi_k(x_k)$, $\varphi_k(x_k)$, ... restant identiques à elles-mêmes dans les différentes décompositions, et cela pour toutes les valeurs des indices h et k , on aura aussi, identiquement,

$$X_k \left(\frac{dX_k}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_k} \right) + X_k \left(\frac{dX_m}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_m} \right) + X_m \left(\frac{dX_k}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_k} \right) = 0,$$

ce que l'on vérifie facilement.

La considération des seules conditions (21) permettra donc d'affirmer que la fonction proposée peut être intégrée par la méthode du facteur, et que ce facteur peut se décomposer en un produit de fonctions de la forme considérée. Les conditions (23) permettront même de déterminer *a priori* les variables qui n'entrent pas dans l'expression du facteur intégrant.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que les fonctions dont le produit composait le facteur intégrant ne renfermaient chacune qu'une seule variable; mais on peut se proposer de rechercher en général les conditions qui doivent être satisfaites pour que μ soit égal à un produit de fonctions ne contenant chacune qu'une seule variable, et d'une autre fonction des variables non comprises dans les premières, c'est-à-dire que la forme supposée de μ est la suivante :

$$\mu = z_1 z_2 \dots z_m f(x_{m+1}, \dots, x_n).$$

On trouverait, en procédant comme précédemment, une série de conditions de la forme (24), et qui s'en déduiraient en faisant $h = 1$, et donnant à k les valeurs $2, 3, \dots, m$. Quant aux équations répondant aux valeurs $m+1, m+2, \dots, n$, de k , h restant toujours égal à l'unité, elles donnent

$$X_1 \frac{1}{f} \frac{df}{dx_k} = X_k \frac{1}{z_1} \frac{dz_1}{dx_k} + \frac{dX_k}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx_k},$$

en remarquant que

$$p_1 = \frac{1}{z_1} \frac{dz_1}{dx_1} \quad \text{et} \quad p_k = \frac{1}{f} \frac{df}{dx_k}.$$

Mais le premier membre de l'égalité obtenue est de la forme

$$X_1 F_k(x_{m+1}, \dots, x_k, \dots, x_n);$$

donc il faudra que le second membre puisse se mettre sous la même forme, et cela pour toutes les valeurs de k , depuis $m+1$ jusqu'à n . Si ces conditions sont satisfaites, on aura, pour déterminer la fonction f , l'équation

$$\frac{1}{f} \frac{df}{dx_k} = F_k,$$

et, par conséquent, on connaîtra les dérivées de la fonction $\log f$ par rapport à ses variables : la fonction f sera donc donnée par une simple quadrature, et l'on aura

$$F = \log f = \int \left(\sum_{i=1}^n F_i dx_i \right) + \text{const.},$$

et, par suite,

$$\mu = A e^{F + \int \left(\sum_{i=1}^m \varphi_i(x_i) dx_i \right)},$$

les fonctions φ étant analogues à celles qui se présentent dans le cas examiné précédemment.

Dans le cas où quelques-unes des fonctions X satisferaient aux conditions (22), on pourrait, en suivant la marche déjà suivie, chercher ce qu'il en résulterait pour la composition du facteur; mais ce qui précède suffit pour le faire prévoir : aussi nous nous contenterons d'indiquer cette analogie, croyant inutile d'entrer dans de plus grands développements à ce sujet, non plus que sur la marche à suivre pour déterminer *a priori* la forme du facteur intégrant. Nous terminerons ces recherches par des considérations qui se rattachent immédiatement aux conditions d'intégrabilité des expressions différentielles par la méthode du facteur.

§ VI. — Sur l'intégration d'une classe d'équations linéaires simultanées aux dérivées partielles du premier ordre.

Si nous considérons les conditions d'intégrabilité représentées en général par l'équation symbolique $[m, h, k] = 0$, nous voyons que ces conditions expriment, soit entre les fonctions X_1, X_2, \dots, X_n , soit entre les variables x_1, x_2, \dots, x_n , des relations dont la considération peut intervenir dans diverses questions se rattachant plus ou moins étroitement à la théorie de l'intégration des expressions différentielles. Ainsi, par exemple, les conditions non satisfaites expriment précisément les relations qu'il faudrait établir entre les variables, jusqu'alors supposées indépendantes, pour que l'expression proposée devint intégrable. On peut aussi considérer ces relations comme définissant certaines des

fonctions X en fonction des autres, et c'est à ce point de vue que nous allons nous arrêter, parce qu'il nous conduira à un résultat général pour l'intégration des équations simultanées linéaires d'une certaine forme.

Le problème que nous nous proposons de résoudre est le suivant :

Étant données m fonctions X_1, X_2, \dots, X_m de n variables indépendantes, $n > m$, on propose de trouver $n - m$ nouvelles fonctions X_{m+1}, \dots, X_n des mêmes variables, et telles que l'expression

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_m dx_m + \dots + X_n dx_n$$

soit intégrable par le facteur, les fonctions données satisfaisant d'ailleurs aux conditions $[h, k, l] = 0$, où h, k et l prennent successivement toutes les valeurs $1, 2, \dots, m$.

Proposons-nous d'abord la détermination de X_{m+1} , et cherchons pour cela le nombre et la forme des équations auxquelles cette fonction doit satisfaire. Toutes les relations entre les fonctions $X_1, \dots, X_m, \dots, X_n$ s'obtiennent de la formule $[1, h, k] = 0$, où h et k prennent toutes les valeurs de la suite $1, 2, \dots, n$; on aura donc toutes les relations qui contiennent X_{m+1} , en supposant, dans la formule considérée, $k = m + 1$, et donnant à h les valeurs $2, 3, \dots, m$. On voit donc que la fonction X_{m+1} aura à satisfaire à $m - 1$ équations de la forme

$$f_h = X_1 \left(\frac{dX_h}{dx_{m+1}} - \frac{dX_{m+1}}{dx_h} \right) + X_h \left(\frac{dX_{m+1}}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx_{m+1}} \right) + X_{m+1} \left(\frac{dX_1}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_1} \right) = 0;$$

les seules variables considérées comme telles, dans la recherche de X_{m+1} , sont x_1, x_2, \dots, x_m , les dérivées de la fonction cherchée qui entrent dans ces équations n'étant relatives qu'à ces variables.

La question est donc ramenée à la forme générale suivante que nous avons en vue :

Intégrer un système de $m - 1$ équations linéaires, à m variables, de la forme

$$f_h = X_1 \frac{dv}{dx_h} - X_h \frac{dv}{dx_1} + v \left(\frac{dX_h}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx_h} \right) - X_1 \frac{dX_h}{dx_{m+1}} + X_h \frac{dX_1}{dx_{m+1}} = 0,$$

où h doit prendre les valeurs $2, 3, \dots, m$, les fonctions X_1, X_2, \dots, X_m satisfaisant d'ailleurs identiquement à des conditions de la forme

$$X_h \left(\frac{dX_k}{dx_l} - \frac{dX_l}{dx_k} \right) + X_k \left(\frac{dX_l}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_l} \right) + X_l \left(\frac{dX_h}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_h} \right) = 0,$$

où h, k, l prennent toutes les valeurs $1, 2, \dots, m$.

Nous allons démontrer que les équations précédentes satisfont aux conditions d'intégrabilité, c'est-à-dire que, pour deux quelconques d'entre elles,

$$f_h = 0, \quad f_k = 0,$$

on a .

$$(25) \quad (f_h f_k) = \sum_{i=1}^{i=m} \left(\frac{df_h}{dp_i} \frac{df_k}{dq_i} - \frac{df_h}{dq_i} \frac{df_k}{dp_i} \right) = 0.$$

Tel est le résultat général que nous nous proposons d'établir, après quoi le problème qui précède se résoudra en suivant les méthodes qui ont été développées à cet effet.

On remarquera d'abord que les équations considérées contiennent la fonction dans les coefficients. Pour la faire disparaître, on posera $dv = u$, t étant une variable nouvelle et u la nouvelle fonction cherchée; on aura alors

$$\frac{dv}{dx_i} = \frac{1}{t} \frac{du}{dx_i}, \quad \text{et} \quad v = \frac{du}{dt};$$

en posant $\frac{du}{dx_i} = p_i$, $\frac{du}{dt} = p$, les équations $f_h = 0$ et $f_k = 0$ deviendront

$$(26) \quad f_h = \frac{X_1}{t} p_h - \frac{X_h}{t} p_1 - \left(\frac{dX_1}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_1} \right) p - X_1 \frac{dX_h}{dx_{m+1}} + X_h \frac{dX_1}{dx_{m+1}} = 0,$$

$$(27) \quad f_k = \frac{X_1}{t} p_k - \frac{X_k}{t} p_1 - \left(\frac{dX_1}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_1} \right) p - X_1 \frac{dX_k}{dx_{m+1}} + X_k \frac{dX_1}{dx_{m+1}} = 0.$$

En tenant compte de la relation identique

$$(28) \quad X_1 \left(\frac{dX_k}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_k} \right) + X_h \left(\frac{dX_l}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx_h} \right) + X_l \left(\frac{dX_1}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_1} \right) = 0,$$

on déduit de (26) et (27) l'équation (29), qui est une conséquence des précédentes,

$$(29) \quad f_{h,k} = \frac{X_h}{t} p_k - \frac{X_k}{t} p_h - \left(\frac{dX_h}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_h} \right) p - X_h \frac{dX_k}{dx_{m+1}} + X_k \frac{dX_h}{dx_{m+1}} = 0.$$

Des valeurs de f_h et f_k , on déduit

$$(30) \quad \begin{cases} \frac{df_h}{dp} = -\frac{dX_h}{dx_k} + \frac{dX_k}{dx_h}, & \frac{df_h}{dp_i} = -\frac{X_h}{t}, & \frac{df_h}{dp_k} = \frac{X_i}{t}, & \frac{df_h}{dp_i} = 0, & i \geq h, & i > 1; \\ \frac{df_k}{dp} = -\frac{dX_k}{dx_h} + \frac{dX_h}{dx_k}, & \frac{df_k}{dp_i} = -\frac{X_k}{t}, & \frac{df_k}{dp_h} = \frac{X_i}{t}, & \frac{df_k}{dp_i} = 0, & i \geq k, & i > 1. \end{cases}$$

D'après ces valeurs, on voit déjà que l'expression (25) se réduira aux termes suivants :

$$(31) \quad (f_h f_i) = \frac{df_h}{dp} \frac{df_i}{dt} + \frac{df_h}{dp_i} \frac{df_i}{dx_1} + \frac{df_h}{dp_h} \frac{df_i}{dx_k} - \frac{df_h}{dt} \frac{df_i}{dp} - \frac{df_h}{dx_1} \frac{df_i}{dp_i} - \frac{df_h}{dx_k} \frac{df_i}{dp_k},$$

et nous avons maintenant à calculer les valeurs de

$$\frac{df_i}{dt}, \quad \frac{df_k}{dt}, \quad \frac{df_i}{dx_1}, \quad \frac{df_k}{dx_1}, \quad \frac{df_i}{dx_k}, \quad \frac{df_k}{dx_k}.$$

On a immédiatement

$$(32) \quad \begin{cases} \frac{df_i}{dt} = -\frac{X_i}{t^2} p_k + \frac{X_k}{t^2} p_i, \\ \frac{df_k}{dt} = -\frac{X_i}{t^2} p_h + \frac{X_h}{t^2} p_i, \\ \frac{df_i}{dx_1} = \frac{dX_i}{dx_1} \frac{p_k}{t} - \frac{dX_k}{dx_1} \frac{p_i}{t} - p \frac{d}{dx_1} \left(\frac{dX_i}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_i} \right) - \frac{d}{dx_1} \left(X_i \frac{dX_k}{dx_{m+1}} - X_k \frac{dX_i}{dx_{m+1}} \right), \\ \frac{df_h}{dx_1} = \frac{dX_i}{dx_1} \frac{p_k}{t} - \frac{dX_k}{dx_1} \frac{p_i}{t} - p \frac{d}{dx_1} \left(\frac{dX_i}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_i} \right) - \frac{d}{dx_1} \left(X_i \frac{dX_h}{dx_{m+1}} - X_h \frac{dX_i}{dx_{m+1}} \right), \\ \frac{df_i}{dx_h} = \frac{dX_i}{dx_h} \frac{p_k}{t} - \frac{dX_k}{dx_h} \frac{p_i}{t} - p \frac{d}{dx_h} \left(\frac{dX_i}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_i} \right) - \frac{d}{dx_h} \left(X_i \frac{dX_k}{dx_{m+1}} - X_k \frac{dX_i}{dx_{m+1}} \right), \\ \frac{df_h}{dx_k} = \frac{dX_i}{dx_k} \frac{p_k}{t} - \frac{dX_k}{dx_k} \frac{p_i}{t} - p \frac{d}{dx_k} \left(\frac{dX_i}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_i} \right) - \frac{d}{dx_k} \left(X_i \frac{dX_h}{dx_{m+1}} - X_h \frac{dX_i}{dx_{m+1}} \right). \end{cases}$$

Si nous substituons maintenant les valeurs (30) et (32) dans l'ex-

pression (31), nous obtenons un résultat de la forme

$$(33) \quad (f_h f_k) = Pp + Qp_k + Rp_h + Sp_k + T,$$

et nous allons nous proposer de calculer les valeurs des coefficients P, Q, R, S, T, ce qui se fera en supposant les substitutions effectuées, et cherchant séparément les termes contenant p_i, p_h, p_k, p , ou ceux qui sont indépendants de ces quantités. En opérant ainsi, nous trouverons d'abord

$$P = \frac{1}{i} \left[X_i \frac{d}{dx_i} \left(\frac{dX_h}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_h} \right) + X_k \frac{d}{dx_k} \left(\frac{dX_h}{dx_i} - \frac{dX_i}{dx_h} \right) + X_h \frac{d}{dx_h} \left(\frac{dX_i}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_i} \right) \right];$$

et, si l'on tient compte de la relation obtenue en dérivant par rapport à x_i , l'équation

$$(34) \quad [i, h, h] = 0,$$

la valeur précédente deviendra

$$(35) \quad P = \frac{1}{i} \left(\frac{dX_i}{dx_i} \frac{dX_h}{dx_k} - \frac{dX_i}{dx_k} \frac{dX_h}{dx_i} + \frac{dX_k}{dx_h} \frac{dX_i}{dx_i} - \frac{dX_k}{dx_i} \frac{dX_h}{dx_k} \right).$$

On trouvera ensuite

$$(36) \quad Q = \frac{1}{i^2} \left[X_h \frac{dX_i}{dx_i} - X_i \frac{dX_h}{dx_i} + 2X_i \left(\frac{dX_h}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_h} \right) \right],$$

$$(37) \quad R = \frac{1}{i^2} \left[X_k \frac{dX_i}{dx_i} - X_i \frac{dX_k}{dx_k} + X_i \left(\frac{dX_h}{dx_i} - \frac{dX_i}{dx_h} \right) \right],$$

$$(38) \quad S = \frac{1}{i^2} \left[-X_h \frac{dX_i}{dx_i} + X_i \frac{dX_k}{dx_h} - X_i \left(\frac{dX_h}{dx_i} - \frac{dX_i}{dx_h} \right) \right].$$

Enfin, pour T, on aura

$$T = \frac{1}{i} \left[X_h \frac{d}{dx_i} \left(X_i \frac{dX_k}{dx_{m+1}} - X_k \frac{dX_i}{dx_{m+1}} \right) - X_i \frac{d}{dx_h} \left(X_i \frac{dX_k}{dx_{m+1}} - X_k \frac{dX_i}{dx_{m+1}} \right) \right. \\ \left. - X_k \frac{d}{dx_i} \left(X_i \frac{dX_h}{dx_{m+1}} - X_h \frac{dX_i}{dx_{m+1}} \right) + X_i \frac{d}{dx_k} \left(X_i \frac{dX_h}{dx_{m+1}} - X_h \frac{dX_i}{dx_{m+1}} \right) \right];$$

en effectuant les différentiations indiquées, et groupant convenable-

ment les termes obtenus, on aura

$$\begin{aligned} iT = -X_i \left[X_i \frac{d}{dx_{m+1}} \left(\frac{dX_k}{dx_h} - \frac{dX_k}{dx_i} \right) + X_k \frac{d}{dx_{m+1}} \left(\frac{dX_h}{dx_i} - \frac{dX_i}{dx_h} \right) \right. \\ \left. + X_h \frac{d}{dx_{m+1}} \left(\frac{dX_i}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_i} \right) \right] \\ - \frac{dX_i}{dx_i} \left(X_k \frac{dX_h}{dx_{m+1}} - X_h \frac{dX_k}{dx_{m+1}} \right) + X_i \left(\frac{dX_i}{dx_k} \frac{dX_h}{dx_{m+1}} - \frac{dX_i}{dx_h} \frac{dX_k}{dx_{m+1}} \right) \\ + \frac{dX_i}{dx_{m+1}} \left[X_k \frac{dX_h}{dx_i} - X_h \frac{dX_k}{dx_i} + X_i \left(\frac{dX_k}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_k} \right) \right]. \end{aligned}$$

Mais la première partie de cette expression n'est autre que la suivante :

$$X_i \left[\frac{dX_i}{dx_{m+1}} \left(\frac{dX_k}{dx_h} - \frac{dX_k}{dx_i} \right) + \frac{dX_k}{dx_{m+1}} \left(\frac{dX_h}{dx_i} - \frac{dX_i}{dx_h} \right) + \frac{dX_h}{dx_{m+1}} \left(\frac{dX_i}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_i} \right) \right];$$

d'où, par un arrangement convenable des termes, on aura

$$\begin{aligned} iT = -\frac{dX_i}{dx_i} \left(X_k \frac{dX_h}{dx_{m+1}} - X_h \frac{dX_k}{dx_{m+1}} \right) + X_i \left(\frac{dX_i}{dx_k} \frac{dX_h}{dx_{m+1}} - \frac{dX_i}{dx_h} \frac{dX_k}{dx_{m+1}} \right) \\ + X_i \frac{dX_h}{dx_{m+1}} \left(\frac{dX_i}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_i} \right) + X_i \frac{dX_k}{dx_{m+1}} \left(\frac{dX_h}{dx_i} - \frac{dX_i}{dx_h} \right) \\ + \frac{dX_i}{dx_{m+1}} \left[X_k \frac{dX_h}{dx_i} - X_h \frac{dX_k}{dx_i} + 2X_i \left(\frac{dX_k}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_k} \right) \right]. \end{aligned}$$

Mais on a, d'après l'équation (34),

$$\begin{aligned} X_i \frac{dX_h}{dx_i} - X_h \frac{dX_k}{dx_i} + 2X_i \left(\frac{dX_k}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_k} \right) \\ = \left(X_k \frac{dX_i}{dx_h} - X_h \frac{dX_i}{dx_k} \right) - X_k \left(\frac{dX_h}{dx_i} - \frac{dX_i}{dx_h} \right) - X_h \left(\frac{dX_k}{dx_i} - \frac{dX_i}{dx_k} \right), \end{aligned}$$

ce qui nous donne enfin, pour T, la valeur suivante :

$$(39) \left\{ T = \frac{1}{i} \left[-\frac{dX_i}{dx_i} \left(X_k \frac{dX_h}{dx_{m+1}} - X_h \frac{dX_k}{dx_{m+1}} \right) + X_i \left(\frac{dX_i}{dx_k} \frac{dX_h}{dx_{m+1}} - \frac{dX_i}{dx_h} \frac{dX_k}{dx_{m+1}} \right) \right. \right. \\ \left. + \frac{dX_i}{dx_{m+1}} \left(X_k \frac{dX_h}{dx_i} - X_h \frac{dX_k}{dx_i} \right) + \left(X_i \frac{dX_h}{dx_{m+1}} - X_h \frac{dX_i}{dx_{m+1}} \right) \left(\frac{dX_i}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_i} \right) \right. \\ \left. \left. + \left(X_i \frac{dX_k}{dx_{m+1}} - X_k \frac{dX_i}{dx_{m+1}} \right) \left(\frac{dX_h}{dx_i} - \frac{dX_i}{dx_h} \right) \right] \right\}.$$

Cette expression pourrait se mettre sous une forme plus symétrique; mais, pour l'objet que nous avons en vue, il est préférable de la conserver sous cette forme.

Si maintenant nous multiplions les équations (26), (27), (29) respectivement par

$$\begin{aligned} & -\frac{dX_i}{dx_k} - \left(\frac{dX_i}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_i} \right), \\ & +\frac{dX_i}{dx_k} + \left(\frac{dX_i}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_i} \right), \\ & -\frac{dX_i}{dx_i}, \end{aligned}$$

et que nous ajoutons les produits obtenus, nous aurons un résultat de la forme

$$P'p + Q'p_i + R'p_2 + S'p_3 + T' = 0,$$

et si nous cherchons les valeurs des coefficients P' , Q' , R' , S' , T' , nous trouvons qu'elles sont les suivantes :

$$P' = tP, \quad Q' = tQ, \quad R' = tR, \quad S' = tS, \quad T' = tT;$$

d'où il suit que l'on a bien, (33),

$$(f_i, f_i) = 0,$$

ce qui démontre que les équations du système considéré satisfont à toutes les conditions d'intégrabilité, comme nous nous proposons de l'établir.

Pour terminer cette étude, nous donnerons quelques exemples de détermination du facteur intégrant.

§ VII. — Applications.

PREMIER EXEMPLE. — Soit proposé de déterminer le facteur intégrant de l'expression

$$(1) \quad x_1(x_2-1)(x_3-1)dx_1 + x_2(x_3-1)(x_1-1)dx_2 + x_3(x_1-1)(x_2-1)dx_3.$$

Divisant par $x_1(x_2 - 1)(x_3 - 1)$, on aura

$$(2) \quad dx_1 + \frac{x_2(x_1 - 1)}{x_1(x_2 - 1)} dx_2 + \frac{x_3(x_1 - 1)}{x_1(x_3 - 1)} dx_3;$$

posant

$$X_1 = 1, \quad X_2 = \frac{x_2(x_1 - 1)}{x_1(x_2 - 1)}, \quad X_3 = \frac{x_3(x_1 - 1)}{x_1(x_3 - 1)},$$

on vérifie immédiatement que la condition d'intégrabilité représentée par le symbole $[1, 2, 3] = 0$ est identiquement satisfaite. D'après ce que nous avons vu, nous aurons à intégrer les équations simultanées suivantes :

$$(3) \quad p_1 = \frac{x_2(x_1 - 1)}{x_1(x_2 - 1)} p_1 + \frac{x_2}{x_1^2(x_2 - 1)}, \quad p_2 = \frac{x_3(x_1 - 1)}{x_1(x_3 - 1)} p_1 + \frac{x_3}{x_1^2(x_3 - 1)};$$

et, pour effectuer cette intégration, nous suivrons la méthode générale. Le système auxiliaire dont il faut chercher une solution commune est alors le suivant :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{df}{dx_1} - \frac{x_2(x_1 - 1)}{x_1(x_2 - 1)} \frac{df}{dx_1} + \left(\frac{p_1 x_2}{x_1^2(x_2 - 1)} - \frac{2x_2}{x_1^2(x_2 - 1)} \right) \frac{df}{dp_1}, \\ 0 &= \frac{df}{dx_3} - \frac{x_3(x_1 - 1)}{x_1(x_3 - 1)} \frac{df}{dx_1} + \left(\frac{p_1 x_3}{x_1^2(x_3 - 1)} - \frac{2x_3}{x_1^2(x_3 - 1)} \right) \frac{df}{dp_1}, \end{aligned}$$

et l'on trouve que ces deux équations sont satisfaites par la solution

$$(4) \quad f = \frac{p_1(x_1 - 1)}{x_1} + \frac{1}{x_1^2}.$$

Égalant cette fonction à une constante a , on en déduira, ainsi que des équations (3), les valeurs

$$p_1 = \frac{ax_1}{x_1 - 1} - \frac{1}{x_1(x_1 - 1)}, \quad p_2 = \frac{ax_2}{x_2 - 1}, \quad p_3 = \frac{ax_3}{x_3 - 1};$$

conséquemment, en appelant μ le facteur cherché, on aura

$$\log \mu = \int (p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3) + b,$$

b étant une constante; d'où

$$\mu = b x_1 (x_1 - 1)^{a-1} (x_2 - 1)^a (x_3 - 1)^a e^{a(x_1 + x_2 + x_3)}.$$

La fonction intégrale, considérée dans toute sa généralité, s'obtiendra au moyen d'une série à termes entiers, et dont le nombre limité dépend de a . Dans le cas simple où l'en attribue à la constante arbitraire a l'unité pour valeur, on a

$$u = b(x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_3 - 1)e^{(x_1 + x_2 + x_3)},$$

pour l'expression correspondante de la fonction cherchée.

Nous présenterons encore quelques applications très-simples, en nous bornant à quelques indications sommaires.

Nous désignerons toujours par μ le facteur intégrant, par u la fonction cherchée, par a et b deux constantes arbitraires, et enfin par e la base des logarithmes népériens.

DEUXIÈME EXEMPLE. — Soit l'expression

$$dx_1 + \frac{x_1}{x_2} dx_2 - \frac{x_1}{2x_3} dx_3.$$

En appliquant la méthode générale, on trouve

$$\mu = \frac{b}{x_1} \left(\frac{x_1^2 x_2}{x_3} \right)^{\frac{a+1}{2}}, \quad \text{et} \quad u = \frac{b}{a+1} \left(\frac{x_1^2 x_2}{x_3} \right)^{\frac{a+1}{2}}.$$

L'expression proposée est immédiatement intégrable en la multipliant par $\frac{2}{x_1}$, et l'intégrale est alors

$$u = \log \frac{x_1^2 x_2}{x_3}.$$

Cette valeur particulière du facteur rentre dans la solution générale, en attribuant aux constantes les valeurs suivantes :

$$a + 1 = 2 \left(\log \frac{x_1^2 x_2}{x_3} \right)^{-1}, \quad b = \left(\frac{x_1^2 x_2}{x_3} \right)^{\frac{-1}{\log \frac{x_1^2 x_2}{x_3}}},$$

l'une de ces valeurs étant fonction de l'autre.

TROISIÈME EXEMPLE. — Soit l'expression

$$dx_1 + \frac{x_1}{2x_2} dx_2 - \frac{x_1 x_2}{x_1 x_2} dx_3 - \frac{x_1^2}{2x_1 x_2} dx_4,$$

On trouve

$$u = b x_1 x_2 e^{\frac{a}{2}(x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2)},$$

et

$$u = \frac{b}{a} e^{\frac{a}{2}(x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2)}.$$

Ce résultat est obtenu en suivant la méthode générale d'intégration; si l'on avait employé la méthode particulière aux équations linéaires, on aurait trouvé

$$u = x_1 x_2 \varphi(x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2),$$

résultat qui concorde avec le précédent, φ étant une fonction arbitraire.

On reconnaît d'ailleurs immédiatement que l'expression proposée devient une différentielle exacte quand on la multiplie par $2x_1 x_2$, valeur particulière du facteur qui rentre dans la formule générale que nous venons de donner.

QUATRIÈME EXEMPLE. -- Soit l'expression

$$dx_1 + \frac{x_1}{x_2 \log x_1 x_2} dx_2 + \frac{x_1}{x_2 \log x_2 x_1} dx_3 + \frac{x_1}{x_2} \cotang \frac{x_1}{x_2} dx_1 - \frac{x_1 x_2}{x_1^2} \cotang \frac{x_1}{x_2} dx_2.$$

On trouve, en suivant la méthode générale d'intégration,

$$u = \frac{b}{x_1} \left(x_1 \log x_2 x_3 \sin \frac{x_1}{x_2} \right)^{a+1} \quad \text{et} \quad u = \frac{b}{a-1} \left(x_1 \log x_2 x_3 \sin \frac{x_1}{x_2} \right)^{a+1};$$

en appliquant la méthode relative aux équations linéaires, on trouve

$$u = \frac{1}{x_1} \varphi \left(x_1 \log x_2 x_3 \sin \frac{x_1}{x_2} \right).$$

Enfin, en multipliant l'expression proposée par $\frac{1}{x_1}$, on reconnaît qu'elle devient la différentielle exacte de la fonction

$$\log \left(x_1 \log x_2 x_3 \sin \frac{x_1}{x_2} \right).$$

qui est comprise, ainsi que la valeur particulière $\frac{1}{x}$ du facteur intégrant, dans les formules générales qui précèdent.



SUR

UNE INTÉGRALE DOUBLE,

PAR M. DIDON,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE RENNES.

I.

X_n désignant la fonction de Legendre, définie par le développement

$$(1) \quad (1 - 2ax + a^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum \alpha^n X_n(x),$$

l'intégrale double

$$\iint \frac{X_n(x) X_{n'}(y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy,$$

dans laquelle les variables x et y sont limitées par la condition $x^2 + y^2 \leq 1$, est nulle, toutes les fois que n et n' sont différents. La proposition est évidente, si l'un des nombres n , n' ou tous les deux sont impairs; je supposerai donc $n = 2m$, $n' = 2m'$. Calculons donc l'intégrale

$$\iint \frac{X_{2m}(x) y^{2p}}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy,$$

dans laquelle les variables satisfont encore à l'inégalité $x^2 + y^2 \leq 1$ (condition que je ne répéterai plus pour les intégrales qui vont suivre), et où p désigne un nombre entier positif. Si l'on intègre d'abord, par rapport à y , elle devient

$$\pi \frac{1.3.5 \dots (2p-1)}{2.4.6 \dots 2p} \int_{-1}^{+1} X_{2m}(x) (1-x^2)^p dx,$$

et, par conséquent, d'après une propriété bien connue des fonctions de Legendre, elle est nulle si p est inférieur à m , et égale, dans le cas où $p = m$, à

$$(-1)^m 2\pi \frac{1.3.5 \dots (2m-1)}{(2m+1)(2m+3) \dots (4m+1)}.$$

Le théorème annoncé se trouve donc démontré, et l'on voit de plus que

$$\iint \frac{X_{2m}(x) X_{2m}(y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy = (-1)^m 2\pi \frac{1.3.5 \dots (2m-1)}{2.4.6 \dots 2m} \frac{1}{4m+1}.$$

De cette dernière égalité on conclut

$$\begin{aligned} & \iint \frac{(1-2ax+a^2)^{-\frac{1}{2}} (1-2by+b^2)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy \\ &= 2\pi \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m (ab)^{2m} \frac{1.3.5 \dots (2m-1)}{2.4.6 \dots 2m} \frac{1}{4m+1} \\ &= \frac{2\pi}{\alpha} \int_0^\alpha (1+\alpha')^{-\frac{1}{2}} d\alpha', \end{aligned}$$

si l'on pose $\sqrt{ab} = \alpha$.

Considérons plus généralement le développement suivant :

$$(2) \quad (1-2ax+a^2)^{-\mu-\frac{1}{2}} = \sum a^n P_n(x),$$

où μ représente un nombre entier positif quelconque.

En différentiant μ fois, par rapport à x , l'égalité (1), on est conduit à la formule

$$1.3.5 \dots (2\mu-1) a^\mu (1-2ax+a^2)^{-\mu-\frac{1}{2}} = \sum a^n \frac{d^\mu X_n(x)}{dx^\mu},$$

qui, comparée à (2), donnera

$$P_n(x) = \frac{1}{1.3.5 \dots (2\mu-1)} \frac{d^\mu X_{n+\mu}(x)}{dx^\mu}.$$

$P_n(x)$ est un polynôme du degré n en x , dont tous les termes ont des degrés de même parité, on en conclut l'égalité

$$(3) \quad \iint P_n(x) P_n(y) (1-x^2-y^2)^{-\mu-\frac{1}{2}} dx dy = 0,$$

si l'un des nombres n, n' ou tous les deux sont impairs. Mais je dis qu'elle a aussi lieu dans le cas où, n et n' étant égaux aux deux nombres pairs $2m$ et $2m'$, m et m' sont différents. Pour établir cette proposition, je calcule

$$\iint P_{2m}(x) y^{2p} (1 - x^2 - y^2)^{\mu - \frac{1}{2}} dx dy;$$

p est un nombre entier positif. En intégrant d'abord par rapport à y , on obtient

$$\pi \frac{1.3.5 \dots (2p-1) 1.3.5 \dots (2\mu-1)}{2.4.6 \dots (2p+2\mu)} \int_{-1}^{+1} P_{2m}(x) (1-x^2)^{p+\mu} dx.$$

L'intégrale définie, qui entre dans cette expression, est égale à

$$\frac{1}{1.3.5 \dots (2\mu-1)} \int_{-1}^{+1} \frac{d^\mu X_{2m+\mu}(x)}{dx^\mu} (1-x^2)^{p+\mu} dx,$$

ou à

$$\frac{(-1)^\mu}{1.3.5 \dots (2\mu-1)} \int_{-1}^{+1} X_{2m+\mu}(x) \frac{d^\mu (1-x^2)^{p+\mu}}{dx^\mu} dx;$$

par conséquent, comme $\frac{d^\mu (1-x^2)^{p+\mu}}{dx^\mu}$ est du degré $2p+\mu$, elle est nulle si p est inférieur à m , et si $p = m$ elle est égale à

$$\frac{2(-1)^m}{1.3.5 \dots (2\mu-1)} \frac{1.2.3 \dots (2m+2\mu)}{1.3.5 \dots (4m+2\mu+1)}.$$

On déduit de là que l'égalité (3) a lieu dans tous les cas où n et n' sont différents, et, en outre, que

$$\begin{aligned} & \iint P_{2m}(x) P_{2m}(y) (1-x^2-y^2)^{\mu-\frac{1}{2}} dx dy \\ &= 2\pi (-1)^m \frac{(2\mu+1)(2\mu+3) \dots (2\mu+2m-1)}{2.4.6 \dots 2m} \frac{1}{4m+2\mu+1}. \end{aligned}$$

Par conséquent on a

$$\begin{aligned} & \iint (1-2ax+a^2)^{-\mu-\frac{1}{2}} (1-2by+b^2)^{-\mu-\frac{1}{2}} (1-x^2-y^2)^{\mu-\frac{1}{2}} dx dy \\ &= 2\pi \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m (ab)^{2m} \frac{(2\mu+1)(2\mu+3) \dots (2\mu+2m-1)}{2.4.6 \dots 2m} \frac{1}{4m+2\mu+1}. \end{aligned}$$

La somme précédente, quand on y fait $\sqrt{ab} = \alpha$, peut s'écrire successivement

$$\frac{2\pi}{\alpha^{2\mu+1}} \int_0^\alpha dx \sum_{m=0}^{m=+\infty} (-1)^m \alpha^{(m+\mu)} \frac{(2\mu+1)(2\mu+3)\dots(2\mu+2m-1)}{2.4.6\dots 2m},$$

$$\frac{2\pi}{\alpha^{2\mu+1}} \int_0^\alpha \alpha^{2\mu} (1+\alpha^2)^{-\mu-\frac{1}{2}} d\alpha.$$

Il est à remarquer que l'on suppose, dans la sommation précédente, α plus petit que 1.

II.

On connaît le développement suivant :

$$-\log(1-2ax+a^2) = 2 \sum \frac{a^n}{n} \cos(n \arccos x).$$

Pour abréger, je représenterai la fonction $\frac{\cos(n \arccos x)}{n}$ par $R_n(x)$, de sorte que l'on aura

$$(4) \quad -\log(1-2ax+a^2) = 2 \sum a^n R_n(x).$$

En différentiant μ fois, par rapport à x , cette égalité, on obtient

$$(2a)^\mu 1.2.3\dots(\mu-1)(1-2ax+a^2)^{-\mu} = 2 \sum a^n \frac{d^\mu R_n(x)}{dx^\mu},$$

ou bien

$$(1-2ax+a^2)^{-\mu} = \frac{1}{1.2.3\dots(\mu-1)2^{\mu-1}} \sum a^n \frac{d^\mu R_{n+\mu}(x)}{dx^\mu},$$

ou enfin

$$(1-2ax+a^2)^{-\mu} = \sum a^n Q_n(x),$$

si l'on pose

$$Q_n(x) = \frac{1}{1.2.3\dots(\mu-1)2^{\mu-1}} \frac{d^\mu R_{n+\mu}(x)}{dx^\mu}.$$

Je vais démontrer que l'intégrale

$$(4) \quad \iint Q_n(x) Q_n(y) (1-x^2-y^2)^{\mu-1} dx dy$$

est nulle toutes les fois que n et n' sont différents, et j'en trouverai la valeur dans le cas de $n = n'$. Comme $Q_n(x)$ est un polynôme du degré n , dont les degrés des divers termes sont de même parité, l'intégrale précédente sera évidemment nulle, si l'un des nombres n , n' ou tous deux sont impairs. On n'a donc qu'à considérer le cas de $n = 2m$, $n' = 2m'$. Calculons

$$\iint Q_{2m}(x) y^{2p} (1 - x^2 - y^2)^{\mu-1} dx dy,$$

où p désigne un nombre entier positif. Intégrant d'abord par rapport à y , on transforme cette expression en

$$2 \frac{2.4.6 \dots 2(\mu-1)}{2p+1(2p+3) \dots (2p+2\mu-1)} \int_{-1}^{+1} Q_{2m}(x) (1-x^2)^{p+\mu-\frac{1}{2}} dx.$$

La dernière intégrale définie étant égale à

$$\frac{1}{1.2.3 \dots (\mu-1) 2^{\mu-1}} \frac{1}{2m+\mu} \int_{-1}^{+1} \frac{d^{\mu} \cos[(2m+\mu) \arccos x]}{dx^{\mu}} (1-x^2)^{p+\mu-\frac{1}{2}} dx,$$

ou encore à

$$\frac{(-1)^{\mu}}{1.2.3 \dots (\mu-1) 2^{\mu-1}} \frac{1}{2m+\mu} \int_{-1}^{+1} \cos[(2m+\mu) \arccos x] d^{\mu} (1-x^2)^{p+\mu-\frac{1}{2}} dx,$$

on voit immédiatement, d'après une propriété bien connue des fonctions $\cos(n \arccos x)$, que, si p est inférieur à m , cette intégrale est nulle, et qu'elle est égale, si $p = m$, à

$$\frac{(-1)^m \pi}{1.2.3 \dots (\mu-1) 2^{m+\mu-1}} (2m+\mu+1)(2m+\mu+2) \dots (2m+2\mu-1).$$

On conclut de là que l'intégrale (4) est nulle toutes les fois que n et n' sont différents, et que l'on a

$$\begin{aligned} & \iint Q_{2m}(x) Q_{2m'}(y) (1-x^2-y^2)^{\mu-1} dx dy \\ &= \pi \frac{(-1)^m}{1.2.3 \dots (\mu-1)} \frac{(m+1)(m+2) \dots (m+\mu-1)}{2m+\mu}. \end{aligned}$$

En particulier, si $\mu = 1$,

$$\iint \frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} \frac{\sin(n' \arccos y)}{\sqrt{1-y^2}} dx dy = 0,$$

n étant différent de n' , ou bien

$$\iint \sin(n\varphi) \sin(n'\varphi') d\varphi d\varphi' = 0,$$

les variables φ et φ' étant assujetties à vérifier l'inégalité

$$\cos^2 \varphi + \cos^2 \varphi' \leq 1.$$

L'intégrale double

$$\iint (1-2ax+a^2)^{-\mu} (1-2by+b^2)^{-\mu} (1-x^2-y^2)^{\mu-1} dx dy$$

est égale à

$$\frac{\pi}{1.2.3 \dots (\mu-1)} \sum_{m=0}^{m=+\infty} (-1)^m (ab)^{2m} \frac{(m+1)(m+2) \dots (m+\mu-1)}{2m+\mu}.$$

Cette quantité, si l'on pose $(ab)^2 = \alpha$, peut être écrite successivement

$$\frac{\pi}{1.2.3 \dots (\mu-1)} \frac{d^{\mu-1}}{d\alpha^{\mu-1}} \sum_{m=0}^{m=+\infty} (-1)^m \frac{\alpha^{m+\mu-1}}{2m+\mu},$$

$$\frac{\pi}{1.2.3 \dots (\mu-1)} \frac{d^{\mu-1}}{d\alpha^{\mu-1}} \left[(\sqrt{\alpha})^{\mu-2} \sum_{m=0}^{m=+\infty} (-1)^m \frac{(\sqrt{\alpha})^{2m+\mu}}{2m+\mu} \right].$$

Si μ est impair, la somme infinie qui entre dans cette dernière expression sera égale, au signe près, à $\arctan \alpha$, diminué des $\frac{\mu-1}{2}$ premiers termes du développement de cet arc tang. suivant la puissance croissante de $\sqrt{\alpha}$; si μ est pair, cette somme sera égale, au signe près, à $\frac{1}{2} \log(1+\alpha)$, diminué de la moitié des $\frac{\mu}{2} - 1$ premiers termes du développement de $\log(1+\alpha)$ suivant les puissances croissantes de α .

III.

Ainsi, en résumé, on vient de trouver la valeur de l'intégrale double

$$(5) \quad \iint (1 - 2ax + a^2)^{-\frac{\mu}{2}} (1 - 2by + b^2)^{-\frac{\mu}{2}} (1 - x^2 - y^2)^{\frac{\mu}{2}-1} dx dy,$$

dans le cas où μ est un nombre entier positif quelconque, et où a et b sont moindres que l'unité, et on a reconnu que cette valeur ne dépend que du produit ab . Ce dernier résultat est une conséquence des propositions que j'ai établies dans le tome V de ce Journal, relativement aux polynômes V à un nombre quelconque de variables. Les fonctions $V_{m,m',m'',\dots}$ à μ variables proviennent du développement

$$(6) \quad (1 - 2ax - 2by - 2cz - \dots + a^2 + b^2 + c^2)^{-\frac{\mu}{2}} = \Sigma a^m b^{m'} c^{m''} \dots V_{m,m',m'',\dots}$$

Considérons les fonctions $V_{0,0,0,\dots}, V_{1,0,0,\dots}, V_{2,0,0,\dots}, \dots, V_{m,0,0,\dots}$, dans lesquelles les premiers indices forment la suite naturelle des nombres, et les autres sont nuls; la somme qui leur correspond est $\Sigma a^m V_{m,0,0,\dots}$. Quand on l'a extraite de $\Sigma a^m b^{m'} c^{m''} \dots V_{m,m',m'',\dots}$, tous les termes qui restent contiennent évidemment en facteur ou b , ou c , Donc, si, dans l'égalité (6), on fait $b = 0, c = 0, \dots$ il vient

$$(1 - 2ax + a^2)^{-\frac{\mu}{2}} = \Sigma a^m V_{m,0,0,\dots},$$

et la fonction $V_{m,0,0,\dots}$ ne dépend que de x et est le coefficient de a^m

dans le développement de $(1 - 2ax + a^2)^{-\frac{\mu}{2}}$ suivant les puissances croissantes de a ; de même, $V_{0,m',0,\dots}$ sera le coefficient de $b^{m'}$ dans le

développement de $(1 - 2by + b^2)^{-\frac{\mu}{2}}$, ou celui de $a^{m'}$ dans le dévelop-

pement de $(1 - 2ay + a^2)^{-\frac{\mu}{2}}$ suivant les puissances croissantes de a .

Or, j'ai démontré généralement que

$$\iiint \dots V_{m,m',m'',\dots} V_{n,n',n'',\dots} dx dy dz \dots = 0,$$

quand $m + m' + m'' + \dots$ est différent de $n + n' + n'' + \dots$; donc, si m et m' sont différents, on a

$$\iiint \dots V_{m,0,0} \dots V_{0,m',0} \dots dx dy dz \dots = 0.$$

En d'autres termes, si l'on pose

$$(1 - 2ax + a^2)^{-\frac{k}{2}} = \sum a^n S_n(x),$$

on aura

$$\iiint \dots S_n(x) S_{n'}(y) dx dy dz \dots = 0,$$

les variables étant limitées par la condition $x^2 + y^2 + z^2 + \dots \leq 1$, quand $n \geq n'$.

Si l'on intègre le premier membre de l'égalité précédente par rapport aux variables autres que x et y , et si l'on supprime un facteur constant, cette égalité se transforme en la suivante :

$$\iint \dots S_n(x) S_{n'}(y) (1 - x^2 - y^2)^{\frac{k}{2}-1} dx dy = 0.$$

On en déduit immédiatement que l'intégrale (5) ne dépend que de ab .

Il serait intéressant de calculer plus généralement l'intégrale multiple

$$\iiint \dots (1 - 2ax - 2by - 2cz - \dots + a^2 + b^2 + c^2 + \dots)^{-\frac{k}{2}} \\ \times (1 - 2a'x - 2b'y - 2c'z - \dots + a'^2 + b'^2 + c'^2)^{-\frac{k}{2}} dx dy dz \dots;$$

mais cette question semble difficile à résoudre.



NOTE

SUR LA

ROTATION DES CORPS SOLIDES,

PAR M. R. RADAU.

Dans un travail publié en 1869 (*Annales de l'École Normale supérieure*), j'ai critiqué un des résultats que renferme le Mémoire de M. Sylvester *Sur la rotation des corps solides*. Le savant géomètre anglais considère un ellipsoïde matériel dont le centre est fixe, et qui roule sur un plan résistant. J'ai cru comprendre qu'il posait en principe, qu'un pareil ellipsoïde devait tourner sans glisser autour du rayon mené au point de contact. M. Sylvester répond que j'ai mal interprété sa pensée : il a voulu dire que la rugosité du plan empêche le glissement de se produire; c'est ce qu'il indique par les mots *upon an indefinitely rough plane*. Puisqu'il faut entendre de cette manière le texte de M. Sylvester, je reconnais que ma critique est sans objet, et que son calcul est exact. Voici d'ailleurs le raisonnement qu'il emploie. Soit J le couple de la résistance *oblique* du plan (qui, par hypothèse, suffit à empêcher le glissement); soient p_1, q_1, r_1 les trois rotations actuelles de l'ellipsoïde, et λ, μ, ν les cosinus des angles que l'axe de ce couple fait avec les axes principaux, l'on aura

$$\lambda p_1 + \mu q_1 + \nu r_1 = 0,$$

puisque l'axe du couple est perpendiculaire à l'axe instantané.

Les équations du mouvement sont de la forme

$$A_1 \frac{dp_1}{dt} - (B_1 - C_1) q_1 r_1 = J \lambda, \dots,$$

et donnent l'intégrale

$$A_1 p_1^2 + B_1 q_1^2 + C_1 r_1^2 = \text{const.}$$

Pour un corps libre, on aurait

$$A \frac{dp}{dt} - (B - C)qr = 0,$$

d'où

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = H, \quad A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = K^2.$$

En supposant que l'ellipsoïde matériel est semblable à l'ellipsoïde central du corps libre, on peut prendre

$$A_1 = \frac{1}{B} + \frac{1}{C}, \quad B_1 = \frac{1}{C} + \frac{1}{A}, \quad C_1 = \frac{1}{A} + \frac{1}{B},$$

d'où

$$A_1 p^2 + B_1 q^2 + C_1 r^2 = \frac{(A + B + C)H - K^2}{ABC}.$$

Soit alors ρ le rapport des temps infiniment petits pendant lesquels les ellipsoïdes tournent d'une même quantité angulaire, on aura

$$\rho^2 = \frac{A_1 p_1^2 + B_1 q_1^2 + C_1 r_1^2}{A_1 p^2 + B_1 q^2 + C_1 r^2} = \text{const.},$$

et l'on pourra faire $\rho = 1$, ce qui revient à confondre les vitesses p , q , r avec p_1 , q_1 , r_1 . On trouve

$$J\lambda = \frac{(B - C)(B + C - A)}{ABC} qr;$$

les résistances normale et tangentielle (P et F), ainsi que le rapport $P : F$, s'expriment en fonction d'une seule variable, qui est la vitesse totale ω , ou bien le rayon de contact R ,

$$F = \frac{2pqr}{ABC} \frac{(A - B)(B - C)(C - A)}{\sqrt{R^2 K^2 - H}}, \quad P = \frac{mR^4 + nR^2 + l}{R^2 K^2 - H},$$

où m , n , l sont des constantes, et l'on peut chercher le maximum du rapport $F : P$, ou bien le minimum du coefficient de frottement nécessaire.



VOYAGE

DE LA

COMMISSION FRANÇAISE

ENVOYÉE PAR LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE SUR LA CÔTE ORIENTALE DE LA PRESQU'ÎLE
DE MALACCA, POUR Y OBSERVER L'ÉCLIPSE TOTALE DE SOLEIL DU 18 AOÛT 1868 (*);

PAR M. STEPHAN,

DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE DE MARSEILLE.

Avant d'aborder le récit de notre voyage, nous exposerons brièvement quel était son but principal, et dans quelles conditions il fut entrepris.

A toutes les époques, les éclipses totales de Soleil ont éveillé dans le public et dans le monde savant des préoccupations diverses qu'expliquent : d'une part, leur rareté pour chaque point du globe, la perturbation apparente qu'elles amènent dans l'ordre régulier de la nature, la beauté grandiose du spectacle; de l'autre, les moyens qu'elles offrent pour le contrôle et la rectification des Tables du Soleil et de la Lune. Mais cette curiosité, un peu banale jusqu'alors a fait place, dans ces

(*) Les personnes qui ont suivi le développement des études scientifiques à l'École Normale depuis un certain nombre d'années auront remarqué, sans doute, que la direction de l'expédition française pour l'observation de l'éclipse totale de Soleil du 18 août 1868 a été confiée à trois jeunes savants sortis de cette École : MM. Stephan, Rayet et Tisserand. Cette circonstance est trop à l'honneur de l'École Normale pour que la rédaction de ces Annales n'ait pas tenu à en conserver le souvenir, en insérant dans ce Recueil le très-intéressant récit que M. Stephan a bien voulu rédiger à sa demande.

L. P.

derniers temps, à un intérêt de l'ordre le plus élevé. Depuis un quart de siècle en effet, l'étude de ces phénomènes, à l'aide d'instruments puissants, a révélé des faits entièrement nouveaux et soulevé les problèmes les plus importants sur la constitution physique du Soleil.

On savait qu'au moment où le dernier filet lumineux disparaît derrière le disque de la Lune, celui-ci paraît entouré d'une auréole brillante traversée par des jets plus ou moins rectilignes en forme de gerbes, d'un éclat comparable à celui de la Couronne et auxquels on a donné le nom de *gloires*. Outre ces apparences déjà signalées, les observateurs modernes, et en particulier ceux de 1842 et de 1860, aperçurent des espèces de flammes rougeâtres, à contours bien définis, disposées sur le pourtour de notre satellite en contact avec le bord suivant les uns, flottant à une certaine distance suivant les autres.

L'annonce de ces faits extraordinaires, auxquels la variété des témoignages, aussi bien que l'habileté des observateurs, donnaient une authenticité incontestable, souleva les hypothèses les plus variées. A quoi fallait-il attribuer la présence de ces protubérances rouges? Devait-on y voir un jeu de lumière ou une réalité objective, et, dans ce dernier cas, de quelle nature étaient ces corps nouveaux? tenaient-ils au Soleil ou à la Lune? En 1860, MM. Y. Villarceau et Chacornac avaient exécuté des mesures tendant à faire supposer que les protubérances appartiennent au Soleil. Toutefois, on ne pouvait fonder une opinion péremptoire sur les résultats d'une seule observation. Il était donc à souhaiter qu'on pût reprendre la question et l'étudier dans les meilleures circonstances avec l'expérience des essais déjà tentés.

Le plus grand obstacle que l'on rencontre dans l'observation de ces phénomènes consiste dans leur peu de durée. Quels que soient le sang-froid et l'agilité d'un observateur, il lui est impossible d'utiliser tous les instants comme il le ferait pour un travail usuel. Forcé de partager son attention entre ce qu'il voit, ce qu'il attend à coup sûr et ce qu'il espère d'inopiné, il lui faut d'un coup d'œil faire la part de ce qu'il doit négliger ou considérer d'une manière plus spéciale. Les premiers moments sont donc forcément sacrifiés et les derniers utilisés avec le plus de fruit. Il en résulte que l'importance d'une éclipse est d'autant plus grande, que sa durée est plus considérable.

Celle du 18 août 1868 offrait, sous ce rapport, une occasion excep-

tionnellement favorable. A cette date, la Lune distante de son périégée de 6 heures seulement, présentait un diamètre apparent presque égal à son maximum, tandis que le diamètre du Soleil n'excédait son minimum que de 9 secondes d'arc; par cette double raison, la durée de l'obscurité complète devait atteindre jusqu'à 6 minutes 47 secondes pour les points du globe les plus favorisés. Une circonstance aussi heureuse ne s'est pas présentée depuis trois siècles.

S'il était à souhaiter qu'on ne laissât pas échapper une si belle occasion sans en tirer tout le parti possible, une difficulté très-grande mettait obstacle au zèle des astronomes d'Europe : le phénomène devait rester invisible pour cette partie de notre continent. En jetant les yeux sur la carte placée à la fin de ce Mémoire, et qui n'est qu'une réduction de celle qui a été publiée par le Bureau des Longitudes, on voit que la ligne de l'éclipse centrale passe près d'Aden, traverse l'Indoustan qu'elle atteint à l'ouest un peu au-dessus de Goa, et à l'est près de Mazulipatam, coupe la presqu'île de Malacca, par une latitude de 12 degrés environ, rencontre la pointe du Cambodge, les Célèbes et vient longer le sud de la Nouvelle-Guinée.

Or, dans l'état de la science, on ne doit pas songer à observer les éclipses sans être muni d'instruments puissants et d'une qualité éprouvée. L'expérience a montré que la plupart des idées fausses qui ont eu cours pendant longtemps, et qui ont amené des théories si bizarres sur la constitution du Soleil et de la Lune, prenaient leur source dans l'emploi, par les anciens observateurs, de lunettes imparfaites et de petites dimensions. Il fallait donc transporter dans une contrée lointaine tout le matériel d'un observatoire complet. Malgré les difficultés d'une telle entreprise, les gouvernements d'Angleterre, de la Prusse, de l'Autriche et de la France s'empressèrent de fournir aux astronomes les moyens nécessaires pour l'exécuter.

En France, deux expéditions furent organisées, sous les auspices de S. Exc. le Ministre de l'Instruction publique, l'une par le Bureau des Longitudes, l'autre par l'Observatoire de Paris.

La première fut décidée dès le principe. M. Janssen, qui avait pour objet spécial l'examen spectroscopique des protubérances, la composa seul et choisit pour s'établir un point voisin de Mazulipatam. La deuxième, sans négliger le côté spectroscopique, devait s'occuper des

phénomènes au point de vue astronomique ordinaire. Sa formation entraînant des frais plus considérables, fut plus tardive; enfin elle fut résolue définitivement en février 1868 sur l'avis d'une Commission de marins et d'astronomes chargés de se prononcer sur son opportunité, et en cas d'affirmative sur le choix d'une station.

La Commission désigna comme lieu de l'observation celui où la ligne de l'éclipse centrale coupe la côte est de la presqu'île de Malacca, par $11^{\circ}42'$ environ. En même temps, elle demandait, pour les dépenses du personnel, l'achat des instruments, les modifications qu'on devait y apporter, et leur transport, un crédit spécial de 50 000 francs. La modicité de cette somme doit surprendre; mais on avait fait entrer en ligne de compte le concours éventuel de la marine française, qui n'a jamais fait défaut, quand il s'est agi des progrès de la science, et le résultat est venu confirmer cette prévision.

Les raisons pour lesquelles on choisit la presqu'île de Malacca sont les suivantes.

D'abord, le point adopté est, en terre ferme, celui où l'éclipse devait atteindre sa plus grande durée; d'autre part, les Allemands devaient se fixer à Aden, les Anglais près de Mazulipatam; M. Oudemans, de Batavia, dans les Célèbes; la France, en se plaçant dans le voisinage de nos possessions de Cochinchine, complétait d'une manière avantageuse une chaîne de points régulièrement espacés sur le parcours de la ligne centrale. Dans l'impossibilité de s'installer à la pointe du Cambodge, dont les côtes marécageuses et garnies de palétuviers sont inabordables, on ne pouvait hésiter qu'entre l'île de Poulo-Condor (*) et la presqu'île de Malacca. Aucune de ces deux stations n'offrait à l'avance une grande probabilité de beau temps. Toute cette région est fortement soumise à l'influence des moussons, et pendant celle du sud-ouest, qui comprend le mois d'août, le ciel est généralement couvert et pluvieux. Cependant M. Aubaret, qui habita Bong-Kok pendant plusieurs années en qualité de consul de France et qui eut occasion, à plusieurs reprises, de naviguer sur le golfe de Siam, affirmait, en se basant sur son expérience personnelle et sur les assertions du capitaine anglais Richards, que, pendant le mois d'août, la côte occidentale du golfe de

(*) Le ciel est resté couvert à Poulo-Condor pendant toute la durée de l'éclipse.

Siam jouit en général d'un plus beau temps que la côte opposée. Enfin le point désigné se trouve abrité par une haute chaîne de montagnes parallèles à la côte, les monts de Kow-Luang, que l'on jugeait devoir arrêter les vapeurs venant de l'ouest. Ces différentes considérations firent donner la préférence à la presqu'île de Malacca.

Le personnel de l'expédition n'était pas encore composé. M. le Ministre, par l'intermédiaire de M. le Directeur de l'Observatoire, me fit offrir d'en prendre la conduite. J'acceptai, et bientôt après je décidai mes amis, MM. Rayet et Tisserand, à m'accompagner.

Nous étions à la fin de mars : une dépêche fut expédiée à la hâte à M. le contre-amiral Ohier, gouverneur de Cochinchine, pour le prier de faire explorer la côte de la presqu'île et de transmettre à la cour de Siam l'annonce de notre prochaine arrivée sur son territoire. Par le premier courrier qui suivit, on envoya des instructions détaillées sur les travaux préliminaires à exécuter.

Il nous restait à peine deux mois et demi pour les préparatifs. M. Eichens, l'habile artiste chargé de la partie mécanique, mit tout en œuvre pour être prêt à temps. Or, il fallait monter équatorialement pour la latitude de $11^{\circ}42'$, le télescope Foucault de $0^m,40$ d'ouverture, qui appartient à l'Observatoire de Paris, un deuxième télescope de $0^m,20$ construit spécialement pour l'expédition, par M. Martin, une lunette de Cauche, de 6 pouces, et construire de toutes pièces un magnétomètre de Gauss pour M. Rayet, qui se proposait de se livrer à diverses recherches au voisinage de l'équateur magnétique. En outre 3 spectroscopes de grandes dimensions furent commandés à M. Duboscq. Tous ces instruments, plus une pendule astronomique, une lunette méridienne d'Eichens et une foule d'objets accessoires devaient se trouver à Marseille avant le 19 juin, date du départ du courrier, et assez solidement emballés pour supporter les chances multiples d'un voyage de 3000 lieues avec trois embarquements, autant de débarquements et deux voyages en chemin de fer.

La brièveté de ce délai nous contraignit, à mon grand regret, à faire le sacrifice de la photographie. Nous avons cherché à y suppléer le mieux possible par des dessins. Notre programme se trouvait ainsi conscrit dans le cadre suivant :

1^o Observation des contacts;

2° Examen spectroscopique et mesure des protubérances;

3° Examen de la Couronne;

4° Subsidiairement les observations de détail usitées lors de toutes les éclipses, la détermination de la longitude et de la latitude de Saïgon et l'étude d'un certain nombre d'étoiles du ciel austral.

Dans les derniers jours, M. le Ministre voulut bien, sur notre demande, nous faire adjoindre M. Chabirand, lieutenant de vaisseau. En comprenant M. Hildebrand, mécanicien de la maison Eichens, la mission se composait donc de cinq personnes. Nous devions nous annexer plus tard M. Olry, lieutenant de vaisseau, chef d'État-major de M. le contre-amiral Ohier, et M. Hatt, ingénieur hydrographe à Saïgon, directeur de l'observatoire de la marine.

Le crédit de 50 000 francs demandé au Corps législatif fut voté sur le Rapport de M. Chauchard; les instruments expédiés en temps utile, nous nous embarquions nous-mêmes le 19 juin à 5 heures du soir sur le paquebot *le Péluze*, des Messageries impériales.

De quelles émotions n'étions-nous point agités. Par une coïncidence malheureuse, nous avions tous à cette époque de graves préoccupations de famille; l'un de nous-mêmes récemment frappé par deux pertes cruelles avait dû faire appel à toute son énergie pour vaincre la résistance de ses proches qui s'opposaient à son éloignement. D'autre part, nous ne pouvions perdre de vue le côté aventureux de notre entreprise. Non-seulement, nous allions mettre en œuvre un capital considérable, mais encore déplacer pour tout un mois et entraîner à notre suite, dans un lieu inconnu, peut-être insalubre, à 3000 lieues de la France, tout un personnel nombreux de marins associés à notre fortune: tout cela, pour une observation finale durant quelques minutes et soumise aux chances aléatoires du temps le plus variable. Or, qui ne sait avec quel aveuglement l'opinion publique absout la témérité couronnée de succès et condamne les efforts infructueux. L'eussions-nous oublié, les prédictions malveillantes ne nous eussent pas manqué pour nous le rappeler; mais nous avions par contre les encouragements affectueux de quelques excellents amis, en particulier de MM. Wolf et Lœvy, et, disposés d'avance à subir toutes les conséquences d'un échec même involontaire, nous partions sans arrière-pensée, convaincus que là où

il n'y a point sacrifice et abnégation personnelle, il ne saurait y avoir un véritable dévouement à la science et à la patrie.

Le temps était magnifique, la mer calme comme un lac, le soleil couchant empourprait l'horizon où disparaissaient les rivages de notre belle Provence; nous partions sous d'heureux auspices. Jusqu'à Alexandrie, notre voyage fut aussi agréable que rapide. En vingt heures, nous arrivions au milieu des Bouches de Bonifacio, dont les côtes dentelées offrent un aspect si pittoresque et des contours si bizarres. En un point, l'horizon est fermé de toutes parts par les rochers; puis nous apercevions l'île de Caprera, le cône du Stromboli, isolé au milieu de la mer, et le 21 au soir, nous étions en vue de Messine. Les paquebots des Messageries ne s'arrêtent à cette station que pour y échanger les dépêches; nous ne pûmes donc pas visiter la ville; mais du haut de la dunette, quel spectacle! C'était à la tombée la nuit: le détroit semblait comme illuminé pour un jour de fête: d'un côté les quais de Messine, de l'autre les lumières de Reggio; au milieu, des bateaux de pêche avec leurs feux sur l'avant et sillonnant la mer dans tous les sens; la mer elle-même phosphorescente et lançant à chaque coup d'aviron des gerbes d'étincelles; tout autour du paquebot un fouillis de barques pleines de marchands de coquilles et de coraux et fortement éclairées par des fanaux de couleur; par-dessus, la voûte étoilée resplendissante, sans un nuage, avec cet éclat particulier à l'Italie méridionale. Comment, en présence de ce merveilleux ensemble, ne pas sentir vibrer en soi un peu d'enthousiasme et ne pas regarder avec amour, une dernière fois, cette terre d'Europe; qui semble s'être parée pour l'instant de la séparation?

De Messine jusqu'en Égypte, la traversée est peu variée; à part les côtes de Crète, qu'on aperçoit vaguement au nord dans le lointain, on ne rencontre aucune terre. C'est un apprentissage de la vie de bord pour ceux des passagers qui se dirigent vers l'Indo-Chine.

Notre paquebot mouillait dans le port d'Alexandrie le 25 au matin.

Outre notre bagage personnel, quatre chronomètres et deux baromètres de Fortin, nous emportions dix-sept caisses d'instruments. Ces colis étaient beaucoup trop lourds et trop volumineux; la difficulté et le danger de leur déplacement n'ont cessé d'être pour nous une cause de préoccupation; aussi, croyons-nous devoir donner, aux voyageurs qui se trouve-

ront dans des conditions analogues, le conseil de faire détailler le plus possible leur emballage. C'est surtout à Alexandrie que je redoutais le débarquement et le transport au chemin de fer, toutes ces manœuvres étant exécutées par des Arabes, dont le manque de soins est complet. Fort heureusement, nous avons eu pour compagnon de traversée, sur le *Péluse*, M. Frugoli, fils de l'agent des Messageries à Alexandrie; grâce à ses recommandations, nos instruments furent traités avec des précautions spéciales, et rien ne se trouva endommagé.

Nous ne pûmes nous arrêter à Alexandrie. Presque aussitôt après notre arrivée, un petit bateau à vapeur vint nous prendre et nous transporta jusqu'au chemin de fer où nous étions attendus par un train spécial, qui partit immédiatement pour le Caire. Toutefois nous n'arrivions dans la vieille capitale égyptienne que vers le milieu de l'après-midi. A mi-route, la rupture d'un des tubes de la locomotive força le train de s'arrêter, et nous dûmes séjourner pendant plusieurs heures à une petite station appelée Dha-Manour. Ces sortes de contre-temps sont presque habituels, paraît-il, sur cette ligne. Quelques-uns des voyageurs en furent vivement contrariés; d'autres, et je fus du nombre, en prirent gaiment leur parti, heureux de l'occasion fortuite qui leur était offerte de visiter cette petite ville, entièrement arabe.

Notre séjour au Caire ne fut pas de longue durée. Toutefois, nous eûmes le temps d'en parcourir rapidement les principaux quartiers et de nous faire conduire à la citadelle. Placée sur le sommet d'une haute colline, qui domine la ville tout entière, l'antique forteresse qui vit la domination et l'égorgement des Mameluks, est le but vers lequel les voyageurs se dirigent tout d'abord. On y visite la belle mosquée et le palais de Méhémet-Ali; mais surtout on y va admirer le magnifique panorama qui se déroule tout autour. A ses pieds, on a la ville immense avec ses jardins, ses terrasses, ses palais, ses mosquées, ses minarets brillants au soleil, ses rues tortueuses où se presse une foule bariolée, comparable par son affluence à celle qui encombre les rues de Paris; au delà, le Nil promène majestueusement ses eaux jaunes entre les palmiers qui le bordent; on suit son cours du regard au-dessous et au-dessus de la ville jusqu'à une grande distance; en se tournant vers sa partie supérieure, on découvre les groupes successifs de pyramides échelonnés sur la rive gauche et dont le plus rapproché, celui de

Ghisé, apparaît dans toute sa grandiose simplicité; au delà, s'étend le désert, semblable à une mer immobile, et là encore on retrouve le souvenir de la France. Mais nous parlerons plus amplement du Caire à l'occasion de notre retour.

Nous en partions le 26 à 10 heures du matin; à 4 heures du soir nous arrivions à Suez après avoir traversé le désert, et bientôt après, nous nous trouvions installés à bord du paquebot *l'Impératrice*, qui devait nous conduire jusqu'à Singapore, et qui leva l'ancre le 27 dans la matinée.

En laissant la rade de Suez, où la Compagnie du canal exécute des travaux si remarquables, le voyageur se trouve brusquement en plein pays biblique. Ici, sur la côte d'Arabie, c'est un bouquet de palmiers où coulent des sources alcalines, qu'on appelle *fontaines de Moïse*; là, le point que la tradition assigne au passage des Hébreux; un peu plus loin, le Sinaï profile sur le ciel ses crêtes dénudées; puis la mer s'élargit et l'on perd les côtes de vue.

La navigation de la mer Rouge est toujours fort pénible: ce long golfe, resserré entre deux déserts brûlants, se trouve fermé à toute brise rafraichissante; la température de l'atmosphère y atteint et dépasse même 45 degrés centigrades, et celle de la mer est presque égale à celle de l'air; il résulte de là un état hygrométrique spécial qui rend la chaleur encore plus accablante et fait de cette région l'une des plus torrides du globe. Si l'on joint à ces causes naturelles, celles qui sont propres à l'installation du navire: la chaleur de la machine, celle des cuisines, l'agglomération des hommes et des animaux; si l'on songe surtout que les parois sont de tôle mince et directement soumises à l'action du Soleil, on comprendra qu'il n'y a point d'exagération dans les plaintes des navigateurs. Durant les deux derniers jours, la situation nous semblait atteindre les limites du tolérable, et cependant, au dire des personnes qui font habituellement ce trajet, nous fûmes extrêmement favorisés. A certains voyages, où le paquebot fait route avec vent arrière et en neutralise l'effet par sa propre vitesse, on est forcé de stopper de temps à autre et de mettre le navire en travers pour l'aérer.

Laissant à gauche la Mecque et la vallée de Moka, à droite l'île de Périm, dont on passe assez près pour apercevoir le petit fort bâti par les Anglais, *l'Impératrice* mouillait dans le port d'Aden le 2 juillet, à 2 heures de l'après-midi.

Aden n'est pas une colonie, ce n'est qu'un dépôt de charbon complètement isolé, où viennent se ravitailler les navires qui se dirigent vers l'Indo-Chine; mais sa situation unique dans ces parages lui donne une importance capitale.

Cette station comprend un amas de collines rocheuses sans végétation et complètement isolé du continent par une langue sablonneuse, basse et étroite. Les populations arabes du voisinage, farouches et hostiles, ferment aux Anglais toutes relations avec l'intérieur. Ceux-ci peuvent à peine sortir de leurs lignes de défense. La rade, abritée au large par des rochers élevés de l'effet le plus pittoresque, présente un abri excellent. En face du point où s'arrêtent les navires, s'élèvent sur une plage de sable noircie par la poussière de charbon, quelques constructions occupées par l'administration ou par ces commerçants au type si original, qu'on appelle des *Panis*, et qu'on retrouve dans toute l'Asie jusque dans la Tartarie chinoise et le Thibet. Ce sont eux qui fournissent aux navires les vivres et tous les objets dont ils ont besoin.

D'une origine évidemment persane, ces Panis sont robustes, ont de beaux traits, les cheveux ainsi que la barbe soyeux et noirs comme l'ébène, le teint fortement bistré; ils portent ce costume très-répandu dans tous les établissements européens des mers de l'Inde et composé d'une veste ronde en toile de coton blanc, avec un jupon de couleur serré autour des reins; ils y joignent en général comme coiffure une sorte de cylindre obliquement tronqué en toile cirée et qui n'est pas sans analogie avec la mitre de nos évêques. Pleins d'urbanité dans leurs manières, de facilité dans les relations, ils possèdent toutes les qualités que réclame le commerce. Ils ont la réputation de pouvoir fournir sur l'heure, fût-ce dans un désert, les objets les plus extravagants; quoi qu'il en soit, on a presque toujours recours à eux, et plusieurs possèdent une immense fortune.

Au-dessus des magasins des Panis, à une certaine élévation et dominant toute la rade, sont groupées les habitations des principaux Européens en résidence à Aden, tels que le gouverneur et les agents des Compagnies de paquebots.

La ville proprement dite est située à 6 kilomètres du port environ. On y parvient par deux routes, dont la principale suit le bord de la

mer dans la plus grande partie de son parcours, et qui débouche dans la ville par une gorge tortueuse reserrée entre deux ponts de rocs taillés à pic que réunit, à une grande hauteur, la voûte d'un pont où passe le chemin de ronde. Il faut visiter cela de jour et de nuit : vue dans l'ombre, l'entrée d'Aden présente un aspect tout à fait fantastique. De ce point, des fortifications formidables s'étendent sur toutes les crêtes et servent moins encore à défendre la position contre le dehors qu'à prévenir les soulèvements intérieurs.

Pour rendre la ville habitable, les Anglais ont fait ce qui est humainement possible; les rues sont propres, bien tracées; on a bâti quelques belles maisons, des temples. Mais que peuvent les efforts les plus énergiques contre l'aridité absolue? Il n'y a d'eau à Aden que dans les célèbres citernes, et encore quelquefois celles-ci sont-elles presque à sec.

On donne le nom de *citernes* à des réservoirs obtenus par la fermeture d'une vallée naturelle où se rendent les eaux de pluie de toute la contrée. La construction de ces immenses ouvrages a été attribuée aux Romains; il est plus probable qu'ils sont fort antérieurs à la période romaine, et qu'ils remontent jusqu'au temps de la reine de Saba, sous le règne de laquelle Aden était un port d'une importance considérable. Les Anglais les ont réparés et complétés; il n'y a pas une excavation qui n'ait été appropriée ou recouverte; malheureusement il ne pleut guère à Aden qu'une fois tous les deux ou trois ans. Un appareil distillatoire fournit de l'eau douce aux Européens, mais les indigènes en sont réduits à leur faible ration de liquide des citernes, dont le goût nous a paru repoussant. Parfois, les citernes elles-mêmes sont insuffisantes; la disette est alors épouvantable : on nous a affirmé que des Arabes prennent du service comme chauffeurs à bord des paquebots, dans l'unique but de boire de l'eau tout à leur aise.

Outre les quelques Panis dont nous avons parlé et les Européens, on trouve à Aden une population très-variée; celle-ci se compose principalement d'Arabes, mais on y rencontre presque toutes les races noires de la côte d'Afrique, y compris ces nègres qui se teignent les cheveux en jaune avec de la chaux vive et un certain nombre d'Indiens; en outre, les Anglais y entretiennent une garnison de Cipayes.

Aden sert de dépôt à tous les produits de l'extrême Orient. Mais on

y fait surtout le commerce du café et des objets qui proviennent de l'intérieur de l'Afrique, tels que les plumes d'autruche et certains bois d'ébénisterie.

On peut dire que ce point offre un des exemples les plus frappants de ce que peut la volonté humaine aux prises avec la difficulté, quand elle est soutenue par une persévérance inébranlable; certes, c'est une étude bien intéressante que d'envisager le manque absolu de ressources de ce sol ingrat et de placer en regard les prodiges accomplis par les ingénieurs anglais; mais il faut avouer qu'en dehors du spectacle grandiose de ses roches tourmentées et de la mer qui en baigne le pied. Aden est dépourvu de tout ce qui fait le charme matériel de la vie. Aussi déplorions-nous du fond du cœur le sort de nos collègues d'Allemagne, qui avaient choisi ce point pour leurs observations et qui devaient s'y établir pendant plusieurs semaines.

Laissant Aden le 3, nous passions dans la soirée au cap Guardafui, où commence le grand océan Indien. De là jusqu'à Ceylan, si l'on néglige le mal de mer, dont plusieurs passagers furent atteints, la traversée fut agréable et rapide. Poussée par les vents réguliers de sud-ouest, l'*Impératrice* voguait à pleines voiles à travers les grandes vagues couvertes d'écume; la température, rafraîchie par ces brises, était redevenue supportable; enfin, la plupart d'entre nous commençaient à s'habituer à cette vie de bord, qui exerce sur les marins une si séduisante attraction. Combien d'heures nous avons passées sur le pont pendant les belles nuits étoilées à contempler ce ciel si justement vanté des tropiques, dont une portion était nouvelle pour nous! A la tombée du jour, on pouvait déjà apercevoir la Croix-du-Sud, qui, jointe aux belles étoiles du Centaure, constitue un groupe si remarquable; le Scorpion, à peine visible à Paris, nous semblait, par son admirable éclat, une tout autre constellation, tandis que la Polaire s'affaiblissait peu à peu en s'abaissant vers l'horizon nord. Cependant cette existence est un peu monotone.

A la sortie de Guardafui, on aperçoit au nord dans le lointain, les côtes de l'île Socotora, puis, avant d'arriver à Ceylan, Molicay et quelques-unes des Laquedives, dont on peut distinguer, à l'aide d'une lunette, les forêts de cocotiers; mais pendant le reste du trajet, on ne voit que le ciel et l'immense plaine liquide, sans autre incident que la

rencontre d'un navire ou que la vue des bandes de poissons volants qui s'élancent par milliers d'une vague à l'autre, comme des nées de sauterelles.

Après neuf jours de mer, nous venions mouiller devant Pointe-de-Galles. Autant le regard est péniblement impressionné par la sécheresse absolue d'Aden, autant il est réjoui par l'aspect des côtes de Ceylan. Pour la première fois, on se trouve là en présence de la végétation de l'équateur. Une forêt composée de cocotiers, d'aréquiers, de bananiers, de canneliers, d'une foule d'essences nouvelles et qui semble couvrir l'île tout entière, descend jusqu'à la mer et forme à la rade une verdoyante bordure, à travers laquelle on distingue les maisons de la ville et les cases des Indiens. En avant, un îlot garni de cocotiers semble placé à dessein pour le plaisir des yeux.

Le paquebot séjournant quarante-huit heures, nous eûmes le temps de faire quelques excursions à l'intérieur.

L'île de Ceylan a une étendue considérable à peu près égale à celle de la Grèce. Elle appartenait autrefois aux Hollandais et se trouve maintenant sous la domination anglaise. Sa capitale, Colombo, est située sur la côte occidentale, sur un parallèle qui coupe à peu près l'île au tiers de sa hauteur, en allant du sud au nord; elle sert de résidence au gouverneur et possède une certaine importance; cependant la presque totalité du commerce vient aboutir à Pointe-de-Galles, où se croisent toutes les lignes de paquebots.

Ces deux villes sont reliées par une belle route qui longe la mer et à laquelle viennent se raccorder une foule d'autres voies moins importantes, mais parfaitement entretenues. Cependant le réseau vicinal ne couvre pas l'île entière. La partie centrale de celle-ci est encore presque inexplorée; l'éléphant y vit à l'état sauvage, et la chasse active que lui font les naturels, pour en obtenir l'ivoire, alimente une branche importante de l'industrie.

Partout le sol y est d'une merveilleuse fertilité. De nombreux cours d'eau y entretiennent la fraîcheur et favorisent le développement de sa végétation tout exceptionnelle. Outre les cocotiers, les bananiers, les aréquiers, on y cultive l'arbre à cannelle, le café, le riz et des légumes de toutes sortes.

Ceylan fut aussi célèbre autrefois par ses pierres précieuses. Il s'y

fait encore une vente énorme de bijoux, mais la plupart sont faux et fabriqués en Europe. Les objets les plus remarquables qu'on y trouve sont des coffrets en bois de sandal, en ébène, et autres bois durs, de l'écaille et de l'ivoire.

La population indigène est belle, d'une taille élancée et gracieuse, quoique la partie inférieure du corps soit un peu grêle. Le costume des hommes du peuple se borne à un jupon de cotonnade, les femmes y joignent un petit caraco flottant qui leur couvre à peu près la poitrine; l'un et l'autre sexe portent les cheveux longs, enroulés derrière la tête et fixés par un peigne d'écaille. Tous ceux qui n'ont pas été convertis au christianisme sont bouddhistes. On sait que Ceylan est considérée comme le berceau du culte de Boudha, et que les sectateurs de ce dieu continuent de la regarder comme une terre sacrée.

C'est là que l'on rencontre pour la première fois l'usage du bétel, commun à toute l'Indo-Chine. La feuille du bétel est verte et assez semblable à celle du lierre; les amateurs y enroulent de la noix d'arec, saupoudrée d'un peu de chaux vive, et partagent cette sorte de chique en petits morceaux qu'ils mâchent constamment. La mastication exprime de ce mélange un jus astringent couleur de brique, qui a pour effet de noircir les dents, qui prennent la couleur de l'ébène, de grossir les lèvres et de donner à la bouche une apparence constamment sanguinolente : c'est une hideuse habitude.

Tous les alentours de Pointe-de-Galles sont pittoresques; mais les excursions préférées des voyageurs sont celles du Jardin-Canell et de Wack-Walley. Ce dernier site est ravissant. Il est distant de Pointe-de-Galles de 4 kilomètres environ. On s'y rend en voiture par une route magnifique accidentée, constamment ombragée par de grands arbres et bordée de fleurs aux vives couleurs. Après avoir traversé des cours d'eau, des rizières, des cultures de toutes sortes, où la verdure prend des proportions dont nos campagnes d'Europe ne peuvent fournir la moindre idée, on laisse le chemin principal pour gravir un sentier qui serpente le long d'un coteau; puis on débouche sur un petit plateau où s'offre soudainement aux regards un paysage admirable, c'est Wack-Walley. De ce point on a sous ses pieds une large vallée, où serpente une rivière à travers une prairie; en face, des coteaux boisés s'échelonnent les uns derrière les autres; puis au second plan, se dé-

tachent les hautes montagnes du centre de l'île, qui ferment l'horizon. Peut-être quinze jours de traversée rendent-ils l'admiration plus facile; quoi qu'il en soit, nous passâmes en ce lieu une délicieuse journée.

Nous aurions voulu pousser jusqu'à Colombo, malheureusement la brièveté de notre séjour ne nous le permit pas. A Pointe-de-Galles nous nous séparâmes de M. Janssen.

De là jusqu'à Singapore le trajet est plus varié qu'entre Aden et Ceylan. Depuis l'instant où l'on s'engage dans le long détroit de Malacca, on ne perd plus les côtes de vue. Celles de l'île de Sumatra, dont on passe fort près, offrent des découpures très-pittoresques. Cette île immense est encore presque fermée aux Européens. Les Hollandais la considèrent comme une de leurs possessions; mais en réalité ils n'y occupent que quelques petits postes sur la côte méridionale pour l'échange du poivre et des autres produits indigènes que leur apportent les naturels. Quant à ceux-ci, ils vivent par tribus indépendantes, dont quelques-unes, principalement dans la partie qui borde le détroit, passent pour pratiquer l'anthropophagie. Un savant linguiste hollandais, qui se rendait en Océanie pour y étudier les divers dialectes, M. Van der Thug, nous divertit fort en nous racontant un épisode d'un de ses précédents voyages à Sumatra, où il faillit être victime de son amour pour les recherches philologiques et où sa maigreur extrême fit seule son salut.

Nous arrivions à Singapore, terme de notre première étape, le 19 juillet à 7 heures du matin, un mois après avoir laissé la France.

A peine le paquebot était-il mouillé, que j'eus une agréable surprise : je vis monter à bord un de mes amis de collège, M. Courgeolles, ancien élève de l'École Polytechnique et actuellement lieutenant de vaisseau sur la *Sarthe*, qui, depuis plusieurs jours, nous attendait en rade pour nous transporter au lieu de l'observation. On comprendra bien aisément quelle était notre impatience d'avoir des nouvelles précises. Une dépêche, puis des instructions avaient été, il est vrai, expédiées par le Ministre de la Marine au gouverneur de Cochinchine. Mais aucune réponse n'était arrivée à Paris avant notre départ. Nous ignorions donc si ces instructions étaient parvenues à Saïgon, et, dans ce dernier cas, s'il avait été possible de s'y conformer. Fort heureusement, tout s'était bien passé. L'avis à vapeur *le Goëland*, désigné d'abord par le Ministère, se trouvait en Chine quand l'ordre arriva de l'affecter à notre

expédition; mais M. le contre-amiral Ohier, Gouverneur de la Colonie, lui substitua la *Sarthe*, transport à vapeur du plus grand modèle, commandé par M. le capitaine de frégate, Letourneur-Hugon.

Dès qu'il fut possible de laisser le paquebot, nous nous empressâmes de descendre à terre et de nous faire conduire à bord de la *Sarthe*. J'avais hâte d'entrer en relations avec le commandant et d'avoir par lui des renseignements plus complets sur le point où nous devons nous établir et sur les mesures préliminaires qui avaient été prises pour en rendre l'habitation possible.

M. Letourneur était accompagné par M. Olry, lieutenant de vaisseau, chef d'état-major de M. le contre-amiral Ohier, bien connu par ses travaux de longitudes, et désigné pour se joindre à notre Commission.

J'appris par ces messieurs que la canonnière à vapeur *le Frelon*, après s'être rendue à Bang-Kock, capitale du royaume de Siam, et avoir obtenu du roi l'autorisation nécessaire, avait conduit depuis une quinzaine de jours M. Hatt, ingénieur hydrographe, sur la côte de la presqu'île. M. Hatt, avant de laisser Saïgon, avait fait confectionner des cabanes pour la lunette méridienne et pour la lunette de Cauche, d'après les indications expédiées par l'Observatoire de Paris; il devait depuis s'être occupé d'aménager l'emplacement pour un séjour d'un mois.

Ces nouvelles nous causèrent une grande satisfaction. Outre l'avantage de trouver tout édifiés des abris pour la plupart des instruments et pour nous-mêmes, ce qui nous faisait gagner du temps, nous étions assurés, pour compléter l'installation, du concours d'ouvriers européens, qui, pour les choses délicates, ne peuvent être qu'incomplètement suppléés par les indigènes. L'enrôlement de ces derniers eut d'ailleurs fait à notre fonds de réserve une brèche qui pouvait nous gêner beaucoup, dans le cas où nous serions obligés de séjourner longtemps dans le pays.

Le jour même, les caisses d'instruments furent portées du paquebot à bord de la *Sarthe*. Ici, je manquerais à mon devoir si je n'adressais de vifs remerciements à tous les officiers de l'*Impératrice*, et en particulier au commandant, M. le lieutenant de vaisseau Macaire, pour l'obligance extrême qu'ils ont déployée à notre égard pendant toute la durée du voyage.

Malgré les ressources que nous devons trouver auprès de M. Hatt,

nous avons à faire quelques acquisitions à Singapore, telles que des briques, du ciment, deux pierres pour supporter un objectif de mire et sa plaque. Tout cela exigeant quelque temps, le départ de la *Sarthe* fut fixé au mardi soir, 21 juillet.

Ce délai nous permit de visiter la ville et les campagnes qui l'entourent.

Une portion principalement peuplée par les Anglais a la physionomie tout européenne. Outre des magasins abondamment fournis des objets en usage chez les nations occidentales, on y trouve des hôtels confortables, un office des postes, une somptueuse habitation pour le Gouverneur et quelques belles maisons particulières. Cependant les négociants européens n'y ont guère que leurs comptoirs et résident de préférence dans des villas où ils unissent les ressources de la campagne à tout le luxe de notre civilisation. Toutes sont à proximité de belles avenues éclairées au gaz comme le centre de la ville.

Autour du quartier européen, s'étend fort loin la partie chinoise de la ville. Les Chinois forment à Singapore une colonie considérable dont le chiffre ne doit pas être très-inférieur à 100 000 âmes.

C'est un bien curieux spectacle qu'une ville chinoise vue pour la première fois. De petites boutiques alignées et complètement ouvertes forment les rues. Ici, ce sont les mille choses particulières à la Chine, depuis les laques et les ivoires sculptés, jusqu'aux salaisons variées dont cette nation est très-friande; là des métiers de tailleurs, chapeliers, cordonniers, etc., s'exercent sur l'éventaire; plus loin, c'est une pagode ou une échoppe d'écrivain public; puis des maisons de jeu : la suite semble interminable, et au milieu de tout cela se presse, active et *grouillante*, toute une population d'hommes, de femmes, d'enfants, chez qui l'on sent, développé jusqu'à ses dernières limites, l'amour du lucre, qui forme le vilain côté de cette race, mais aussi qui lui communique sa force d'expansion si remarquable. Quelques-uns de ces Chinois sont fort riches; l'un d'eux, appelé Vam-Poo, passe pour avoir une fortune comparable à celle de nos plus grandes maisons d'Europe. Il veille lui-même à son commerce multiple dans une petite boutique de peu d'apparence, où il fait ses comptes, sert les clients, se tient prêt à livrer sur l'heure tous objets demandés, que ce soit une chose d'importance insignifiante, ou la cargaison complète d'un navire; mais en

dehors de la ville il possède une résidence magnifique où il se plaît à exercer l'hospitalité d'une façon princière. Cette propriété est visitée par tous les voyageurs. On y admire entre autres choses de gigantesques bassins où la fameuse plante *Victoria regina* est cultivée avec des soins tout particuliers (*).

L'île est recouverte presque entièrement par des forêts d'arbres gigantesques qui sont percées dans tous les sens par des routes superbes. L'emplacement de la ville elle-même a été pris sur un coin de forêt; on a réservé de celle-ci une petite portion qui est enclavée dans un jardin anglais ouvert aux étrangers et aux abonnés qui comprennent tout le public élégant de Singapore.

Près de là, s'élève la charmante habitation d'un riche négociant, M. Spinner, de nationalité américaine, mais français par ses relations et ses tendances, comme il est parisien de la meilleure roche par ses manières et son langage. J'eus la bonne fortune d'être mis en rapport avec lui et de passer dans sa villa la soirée du premier jour. Qu'il reçoive mes remerciements pour sa gracieuse hospitalité et pour l'obligeance qu'il mit à nous fournir tous les renseignements dont nous avions besoin pour nos achats. Chez lui m'était réservée une nouvelle rencontre aussi agréable qu'inattendue, celle d'un ancien camarade de Charlemagne, M. Trasbo, ingénieur des constructions navales et détaché près du gouvernement chinois pour les travaux du port de Fou-Tcheou.

La soirée du lendemain nous réunit tous chez le consul de France, M. Troplong, pour qui naturellement avait été notre première visite, et qui, à l'occasion de notre passage, avec un empressement dont nous savions apprécier toute la délicatesse, avait convié la plupart de nos compatriotes de Singapore.

On l'a dit souvent, pour apprécier son pays, il faut l'avoir quitté. Rien n'est plus vrai : que les gens au patriotisme froid s'expatrient pour quelques mois; qu'ils aillent en un lieu éloigné où l'on ne puisse plus croire à la possibilité de regagner le sol natal par ses propres forces en quelques journées ou quelques semaines de marche forcée, qu'il séjournent ainsi chez un peuple aux coutumes différentes des

(*) Outre les Chinois, la population comprend encore un certain nombre de Malais et de Malabars.

leurs, puis qu'un jour ils arrivent tout à coup sur une terre où flotte le pavillon national, il n'en est pas un dont le cœur ne batte alors avec un redoublement de vitesse.

Nous n'avions pas cessé, quant à nous, d'être entourés de compatriotes; et cependant quelle émotion, après une longue traversée, de retrouver la patrie présente sur un sol étranger, de la sentir puissante et respectée derrière les glorieuses couleurs de son drapeau; quel charme aussi de revoir un salon français où tout est animé par cette grâce particulière dont nos dames ont le secret.

Le séjour de Singapore est, on le voit, fort agréable; malheureusement, la sécurité n'y est pas complète; son nom, qui en malais signifie *Ville des Tigres*, est encore trop justifié. Ces terribles animaux, qui foisonnent dans la presqu'île de Malacca, trouvent moyen de franchir le petit bras de mer qui en sépare la pointe inférieure de l'île de Singapore, et là, ils se livrent à des attaques meurtrières contre les hommes et les troupeaux. On leur fait, il est vrai, une chasse active; dès que l'un d'eux s'est montré, il est signalé partout, poursuivi, traqué, et bientôt mis à mort; mais ce n'est jamais qu'après avoir commis d'affreux ravages.

Ainsi qu'il avait été convenu, la *Sarthe* levait l'ancre dans la soirée du 21.

Nous emmenions avec nous M. le baron Gorse, récemment nommé consul à Bang-Kok, comme successeur de M. Aubaret. Après s'être rendu à Saïgon, M. Gorse, profitant du voyage de la *Sarthe* dans le golfe de Siam, était revenu à Singapore avec ce navire et nous accompagnait jusqu'à notre station astronomique; de là le *Frelon* devait se détacher pour le conduire à sa destination. Notre troupe était donc assez nombreuse; et, je dois le dire, la gaieté ne lui faisait pas défaut. Nous approchions avec confiance de cette côte inconnue, où tout était imprévu, où nous devions séjourner un mois entier et trouver le succès ou la déception. L'homme se familiarise avec l'inquiétude même; à force d'envisager depuis le départ les chances heureuses ou défavorables, nous avons fini par nous blaser avec ces impressions, et maintenant, résolu à ne négliger aucune des précautions préliminaires, nous étions prêts à subir philosophiquement les conséquences d'une impossibilité indépendante de notre volonté.

Du reste, les conditions extérieures favorisaient ces dispositions.

Malgré la mousson, le temps était admirable, la mer calme comme un lac, la marche du bateau excellente; enfin la plus grande cordialité s'était bien vite établie entre nous et tous les officiers du navire. Nous étions en route depuis deux jours, lorsqu'on nous fit la piquante surprise d'un *baptême de la ligne*. Je ne m'étendrai point sur le récit de cette amusante farce décrite par tant de voyageurs, et qui plait toujours aux équipages comme une nouveauté; je me borne à dire que tout le monde s'y prêta de bonne grâce et que, pour mon compte, j'y pris un plaisir extrême. La cérémonie touchait à sa fin, quand elle fut brusquement interrompue par la chute d'un homme à la mer. Les inquiétudes sur le sort de cet imprudent étaient fort vives à cause de l'énorme quantité de requins qui infestent ces parages; fort heureusement on parvint à le sauver.

Enfin, le 25, au soleil levant, on apercevait l'îlot de Koh-Luem, et bientôt après la *Sarthe* jetait l'ancre par 8 mètres de fond, à 2 milles environ de la côte, en face de notre futur observatoire. Du mouillage, on pouvait distinguer assez vaguement à l'œil nu des cases sur le rivage et très-distinctement le *Frelon*, à qui son faible tirant d'eau avait permis de s'approcher fort près de terre.

En face de nous, la côte, abritée des vents d'ouest par les monts de Kow-Luang, dessinait une assez vaste baie limitée au nord par une pointe avancée et prolongée fort loin vers le sud par un rivage presque rectiligne. La pointe nord est surmontée d'un pic bizarrement conformé qui est désigné, dans la description hydrographique du capitaine Richards, sous le nom de *Corne-du-Sud*, par opposition avec un autre pic de forme analogue, situé plus au nord. A l'intérieur de la baie sont disséminés plusieurs îlots dont les plus importants sont vers le nord celui de Koh-Luem et vers le sud une autre île dont la forme rappelle tout à fait celle d'une tortue. Dans sa position, la *Sarthe* se trouvait exposée aux lames venant du large; mais la sûreté des fonds (*) et la régularité des vents de terre enlevaient tout danger à ce mouillage. Un seul inconvénient en résultait: c'était un battelage laborieux à cause de la grande distance où nous nous trouvions de la terre.

(*) Dès son arrivée, M. Hatt avait exécuté de nombreux sondages et dressé une carte hydrographique de cette région.

Nous reçûmes bientôt la visite du commandant du *Frelon*, M. le lieutenant de vaisseau Béhic, par lequel nous apprîmes, qu'après quelques objections premières, la cour de Siam s'était prêtée de bonne grâce à la demande du Gouvernement français; elle prenait à sa charge la partie matérielle de notre installation, et le roi lui-même avait déclaré vouloir se joindre à nous, le jour de l'éclipse, pour observer le phénomène. En conséquence, un grand nombre d'ouvriers siamois appelés du loin se trouvaient actuellement réunis sur la côte; une vaste maison en bambous était presque terminée, les deux cabanes de planches mises en place; enfin, la plage étant fort plate, les matelots du *Frelon* avaient établi un warf de débarquement. Nous pûmes bientôt apprécier par nous-mêmes le véritable tour de force accompli par M. Hatt.

Comme dans tous ces parages, là où les palétuviers n'existent pas, la mer est bordée par une forte dune de sable avec peu de végétation. C'est sur ce terrain que l'observatoire était placé. Au point choisi, la largeur du terrain sablonneux variait entre 100 et 200 mètres; au delà commençait une épaisse forêt s'étendant jusqu'au sommet de Kow-Luang.

L'ensemble des constructions, comme il résulte des photographies que nous joignons à ce récit, ne manquait point de pittoresque. Parallèlement au rivage, M. Hatt faisait édifier, au moyen de clayonnages en bambous, une habitation rectangulaire de 80 mètres de long, composée d'une grande pièce très-élevée complètement ouverte du côté de la mer et flanquée de deux longues galeries susceptibles d'être partagées en nombreux compartiments. Des haubans en rotin partant du faite étaient fixés au sol et assuraient une parfaite solidité. Au nord-est étaient situées les cases des hommes de service; derrière, du côté de la forêt, la cuisine; et au sud-ouest le terrain, à peu près plan, affecté aux instruments. Le tout devait plus tard être entouré d'une palissade.

Ce qui nous importait le plus, c'était la mise en place des instruments; on commença sans retard le débarquement des caisses. Cette opération, qui eût été très-difficile sans le secours du warf de M. Béhic, était terminée vers le milieu de l'après-midi, et l'on procéda immédiatement au déballage. Le lendemain, nous nous installions nous-mêmes définitivement à l'observatoire, que les naturels avaient surnommé Wha-Tonne (*).

(*) Selon M. Pierre, Wha-Tonne signifie à peu près *lieu d'observation*.

La cabane pour la lunette méridienne ne laissait rien à désirer; au centre, un pilier d'un mètre cube en granit et reposant sur une fondation de béton, présentait des garanties suffisantes de stabilité: le terrain, il est vrai, était un peu mouvant à la surface, mais on avait donné



une grande étendue aux fondations, et d'ailleurs, dans l'impossibilité de transporter notre bagage à travers la forêt, nous étions forcés d'accepter le sol tel qu'il se trouvait et d'en tirer parti le mieux possible. Quant à la deuxième cabane, elle était destinée à recevoir l'équatorial de Cauche et le petit télescope de 0^m,20. Mais il fut reconnu que le premier de ces deux instruments pouvait seul y prendre place.

Nous avions à construire dans la cabane méridienne un pilier pour la pendule sidérale; à édifier deux piliers dans le méridien pour y placer l'objectif et la plaque de mire; à bâtir des fondations pour les deux télescopes, des piliers pour les instruments magnétiques de M. Rayet; enfin à disposer des abris pour ces diverses pièces. En outre, devant opérer en plein air le jour de l'éclipse, nous tenions à relier le grand télescope et la lunette de Cauche à la cabane méridienne par un circuit électrique, afin de pouvoir installer près de ces deux in-

struments des relais télégraphiques battant la même seconde que la pendule sidérale et susceptibles de produire un bruit assez fort pour couvrir celui de la mer ou des clameurs voisines. Ces divers travaux marchèrent avec rapidité.



Le 28 juillet nous pouvions, M. Tisserand et moi, commencer les observations à la lunette méridienne, en vue de déterminer notre latitude exacte et une longitude approchée. Ce travail fut continué sans interruption, comme dans un observatoire régulier, autant du moins que le permit l'état du ciel, bien souvent défavorable. Nous trouvions ainsi pour la longitude et la latitude Wha-Tonne :

Longitude comptée à l'est de Paris..... $6^{\text{h}} 29^{\text{m}} 50^{\text{s}}$.

Latitude boréale..... $11^{\circ} 42' 35''$.

Le premier de ces nombres est une moyenne fournie par trois culminations lunaires, le deuxième est le résultat de deux séries complètes exécutées dans les nuits du 7 et du 10 août.

De son côté, M. Rayet examinait les spectres des principales étoiles visibles dans la région australe, au moyen d'un spectroscopie monté

sur le télescope de 0^m,20 et déterminait les constantes magnétiques du lieu.

La portion du pays où nous nous trouvions établis est fort peu habitée en temps ordinaire; cette solitude tient au manque presque absolu de ressources naturelles et particulièrement au défaut d'eau potable. Les quelques familles qu'on y rencontre çà et là sont plongées dans la misère la plus complète. Ces malheureux, presque nus, n'ayant pour nourriture que quelques rares poissons et du riz cuit à l'eau, pour boisson que de l'eau croupie, sont constamment en butte aux fièvres paludéennes et aux attaques des tigres. On peut dire qu'ils n'ont qu'une vie purement animale sans autre plaisir que l'usage du bétel. Pourtant, ils travaillent le bambou avec une certaine habileté. A l'aide d'une sorte d'instrument, moitié coutelas, moitié hachette, qu'ils portent passé à la ceinture entre la peau et la pièce d'étoffe qui leur couvre les reins, ils coupent le bambou, le fendent, l'ajustent avec une étonnante rapidité. Ils ont d'ailleurs de belles formes, mais de gros traits; le détail le plus caractéristique de leur ensemble est leur chevelure; celle-ci est complètement noire, abondamment fournie de poils durs comme des crins et sans aucune ondulation. Tous ont la presque totalité de la tête rasée, sauf une portion ovale sur le sommet; dans le jeune âge, les cheveux qui poussent sur cette partie sont enroulés en chignon; plus tard, on les coupe à la hauteur de 2 centimètres à peu près, et il résulte de cette opération une sorte de brosse de l'effet le plus bizarre.

Pour nous, dans cet ingrat milieu, nous étions pourvus de tout le confort désirable; des lits garnis de moustiquaires avaient été dressés dans nos chambres; chaque matin, la *Sarthe* nous envoyait des provisions fraîches pour la journée; enfin deux Chinois amenés par nous de Singapore exécutaient, conjointement avec le domestique du commandant et ceux de nos autres compagnons, le service le plus minutieux et le plus ponctuel. Aussi notre petite colonie vivait-elle gaie-ment. Tous les jours le commandant Letourneur venait à terre et dînait avec nous. Ainsi réunis, à la tombée du jour, dans notre grande salle commune, en face d'une belle étendue de mer, autour d'une table presque richement servie, nous aurions pu, par un léger effort, nous croire à la campagne, près d'une grande ville d'Europe.

Cependant, je dois l'avouer, nous n'étions pas, au début, sans quelque

inquiétude touchant la présence des tigres, dont nous n'étions garantis dans nos chambres que par une cloison de bambous tout à fait insignifiante. Mais il est à croire que ces hôtes incommodes, habitués à la solitude, se retirèrent vers l'intérieur au bruit qui se faisait incessamment sur la côte. Bientôt nous n'y pensâmes plus, et de fait on n'en vit aucun.

Quoique les travaux d'installation de nos instruments absorbassent à peu près tous nos instants, nous organisions assez fréquemment, dans la matinée, des excursions autour des cases; mais il nous fut impossible, faute de temps, de dépasser une distance de quelques lieues. Nous faisons généralement ces promenades soit en chassant, soit sur des chevaux que les Siamois avaient mis à notre disposition. Un jour, j'eus une singulière aventure. J'étais un peu à l'écart, poursuivant des tourterelles, quand tout à coup, tournant un massif de broussailles, je me trouve face à face avec un énorme éléphant. La rencontre était désagréable, surtout avec un fusil chargé de petit plomb pour toute défense; mais il fallait prendre un parti; je passai fort vite et très-heureux que ce fût sans encombre. Au retour, j'appris que mon éléphant sauvage n'était qu'un des pensionnaires du roi de Siam, dont un troupeau était arrivé la veille.

La portion de la forêt que nous parcourions ainsi n'offre pas une très-grande beauté de végétation. C'est une suite de taillis d'une hauteur médiocre, très-touffus, formés principalement de bouquets de bambous, de rotins, de lianes, et parsemés de quelques beaux arbres, entre autres l'arbre à l'huile. On n'y compte ni cocotiers, ni aréquiers, ni aucuns fruits, si ce n'est quelques pommes-cannelles. Le sol y est presque partout marécageux. Par place, on rencontre quelques clairières garnies de gazon. Lorsqu'on s'enfonce plus avant, jusqu'aux monts Kow-Luang, on trouve une végétation puissante et deux charmantes rivières. Rien ne semble donc opposer d'obstacles sérieux à l'exploitation des richesses minérales de ces montagnes, qui renferment, paraît-il, de l'étain en quantité considérable et même de l'or.

Nous devons ces derniers renseignements à M. Pierre, directeur du Jardin botanique de Saïgon. Transporté à Bang-Kok par le *Frelon*, l'intrépide naturaliste, accompagné seulement d'un Annamite, de deux Siamois et d'une charrette à bœufs, nous rejoignait peu de jours avant l'éclipse, chargé de plantes et d'oiseaux de toutes sortes. Après avoir parcouru

l'espace presque désert de 40 lieues, qui sépare notre station de la capitale siamoise, et prenant à peine deux jours de repos, il repartait pour explorer les montagnes de Kow-Luang.

La plage de Wha-Tonne, habituellement si solitaire, était devenue fort animée; outre notre propre groupe, où régnait une grande activité par suite des allées et venues continuelles entre la terre et les deux navires, il s'était formé un peu plus au nord, à un mille environ de l'observatoire, un établissement siamois d'une véritable importance. Lors de notre arrivée, ce dernier point était déjà occupé par le frère du premier ministre et sa suite, dans laquelle se trouvait un jeune mandarin, appelé Né-Houat. Celui-ci, ayant fait partie de l'ambassade siamoise à Paris, parlait un peu français et nous servait d'intermédiaire dans nos rapports avec les ouvriers indigènes. Depuis lors, les Siamois avaient construit une sorte de palais en planches et en bambous pour le roi et sa cour, des cases pour les ministres et les étrangers de distinction; puis successivement étaient arrivés par terre des troupeaux de buffles, de bœufs, de chevaux, d'éléphants, en un mot tout ce qui devait servir à l'entretien d'une troupe nombreuse. Le cortège royal, composé de 14 bateaux à vapeur, venait lui-même mouiller dans la baie quelques jours avant l'éclipse et, bientôt après, il était rejoint par le yacht du gouverneur de Singapore, accompagné d'une corvette anglaise. A ce moment, 18 bateaux à vapeur étaient réunis en ce point, où n'avait sans doute jamais séjourné aucun grand navire, si ce n'est celui du capitaine Richards.

On tomberait dans une grave erreur si l'on jugeait de tout le royaume de Siam d'après la partie que nous avons décrite. Celle-ci, éloignée du centre, auquel rien ne la rattache, est en quelque sorte considérée comme une non-valeur. Il est à croire que l'influence du roi, qui n'a pas occasion de s'y exercer, n'y existe guère que de nom. La région qui comprend la capitale est au contraire très-habitée et très-fertile. Entre autres produits, elle fournit en abondance des fruits variés et d'une qualité tout exceptionnelle, dont la réputation s'étend jusqu'à Saïgon et Singapore. Bang-Kok, où résident plusieurs Européens, est bâti sur les bords d'un grand fleuve, le Menam. Outre le Palais royal, qui est considérable et fort somptueux, on y remarque, dit-on, plusieurs constructions importantes, d'une architecture originale, et parmi celles-ci des

édifices appelés *crémations*, où l'on brûle les morts. Le détail suivant pourra surprendre : certains quartiers sont éclairés au gaz.

La suite du roi était fort considérable ; outre ses femmes, ses nombreux enfants, les ministres, les dignitaires de la Couronne, une foule de grands du pays et quelques Européens de Bang-Kok, il était accompagné d'une partie de son armée. Ce déploiement de puissance est habituel aux souverains de ces contrées quand ils se déplacent ; cependant, on peut penser que dans la circonstance présente, il avait un but tout particulier. On a vu, par le récit de M. Béhic, que notre débarquement sur le territoire siamois n'avait pas laissé que de donner quelque ombre aux hommes d'État de ce pays. Voici la raison de ces craintes. Depuis que la France, par la conquête du royaume d'Annam, s'est substituée au roi d'Hué et a fondé la riche colonie dont la prospérité croît chaque jour, le gouvernement de Siam, toujours en éveil, n'a cessé d'avoir les yeux tournés de notre côté. Plus puissant que ses voisins avant notre arrivée, il exerçait sur tous une véritable suprématie et, en particulier, il était parvenu à imposer au roi de Cambodge une sorte de vassalité à laquelle nous avons mis un terme. Depuis lors, comprenant que sa propre indépendance est entièrement livrée à notre merci, il considère tous nos actes avec défiance et nos progrès avec amertume. Il faut ajouter que la diplomatie anglaise n'a cessé de manœuvrer à Bang-Kok de façon à entretenir ces inquiétudes.

On conçoit, par ce simple aperçu, que l'annonce d'une expédition française sur la côte de Malaisie ait éveillé quelque émoi chez nos soupçonneux voisins ; les difficultés opposées d'abord à la demande du gouverneur de Saïgon en sont la preuve, et il est permis de croire que le roi, venant dans ce pompeux appareil, voulait juger par lui-même de nos intentions véritables et éviter une prise de possession escamotée par surprise. Quoi qu'il en soit, nos relations avec nos hôtes ne cessèrent d'être empreintes de la cordialité la plus complète, et je dois ajouter que le goût du roi pour l'astronomie suffirait d'autre part pour expliquer son déplacement.

C'est un fait très-remarquable que la façon dont l'amour de cette science s'est répandu dans la famille du roi. Un de ses frères, mort il y a quelques années, était entièrement voué à l'étude des astres. Il s'était procuré, par l'entremise des Anglais, un grand nombre de lu-

nettes et d'instruments variés dont il se servait assidûment et passait pour posséder une instruction relativement profonde. Le roi lui-même était fort instruit, eu égard aux habitudes de son peuple. Élevé par un missionnaire anglais, dont il parlait la langue, il avait puisé dans des ouvrages européens des notions assez complètes de cosmographie et continuait avec passion les études de son frère.

Conformément aux lois de l'étiquette maritime, son arrivée fut saluée par la *Sarthe* de vingt et un coups de canon, et aussitôt qu'il fut à terre, nous allâmes lui rendre visite.

Le prétendu palais de bambous qu'on lui avait élevé sur la côte était entouré d'une haute palissade formant cour d'honneur, où se tenaient les gardes et l'artillerie. Dans cette cour, on avait disposé pour le roi une lunette de force médiocre avec un siège à ressort analogue à ceux qui sont en usage dans les observatoires d'Europe, ainsi qu'une sorte de maisonnette roulante destinée aux princesses. Le bâtiment d'habitation était divisé en deux parties par une cloison dans le sens de la longueur; l'une, celle qui donnait sur la cour, était occupée presque en totalité par une longue galerie tendue de draperies en cotonnade rouge et décorée de faisceaux d'armes et de grandes lampes sur trépied, alimentées avec cette huile de coco qui répand une odeur si désagréable. Au milieu de cette pièce, faisant face à l'entrée, une porte donnait sur les appartements particuliers où se tenaient les femmes et les enfants. En avant de cette porte, était dressée pour le roi une estrade élevée de quelques pieds. C'est dans la grande galerie que nous fûmes reçus : les tambours battent aux champs à la française, le roi s'avança jusqu'à la porte extérieure, et après nous avoir tendu la main à chacun, il nous invita à entrer. Tout autour, se tenaient accroupis les enfants et les gens de la Cour, y compris le premier ministre. Aucun Siamois, en effet, ne peut se tenir debout devant le souverain, on le sert en marchant sur les genoux et sur les mains; du reste, ces formes serviles sont en usage du haut en bas de l'échelle sociale; tout le monde s'agenouille devant le roi, tous les autres devant le premier ministre, et ainsi de suite.

Le roi était un vieillard de 68 ans (*), de taille moyenne et fort

(*) Le séjour de Wha-Tonne fut fatal au roi; il prit sur cette côte insalubre le germe d'une fièvre qui l'emporta quelques semaines plus tard. Son fils lui a succédé.

maigre; sa figure, empreinte de bonhomie, portait les traces d'une attaque de paralysie dont il avait été atteint quelque temps auparavant; son crâne, entièrement rasé, lui donnait une physionomie tout à fait à part au milieu de ses sujets. Incessamment, il mâchait le bétel. Quant à son costume, il se composait d'une petite veste sans revers, d'un gilet montant jusqu'au cou et d'un large pantalon tombant jusqu'à la cheville; le tout en soie grise à petites raies; d'énormes émeraudes servant de boutons à son gilet et des babouches dorées, qu'il laissait de temps à autre, constituaient le seul luxe de sa toilette.

Après que nous eûmes pris place dans des chaises d'Europe, le roi, s'exprimant en anglais, se mit à nous parler un peu de tout : d'abord d'astronomie, de l'éclipse, des marées, et puis il demanda l'épée qui lui a été envoyée par l'Empereur, nous fit remarquer la décoration de la Légion d'honneur, revint à l'astronomie et termina en prenant une boîte pleine de poudre d'or, dont il nous distribua quelques pincées, en nous apprenant que ce produit provenait des environs. Pendant ce temps, on nous servait toujours à genoux du café, du thé, une liqueur bizarre, moitié vin blanc moitié vinaigre, et des cigarettes de tabac siamois.

Rien d'amusant comme toutes ces formalités accomplies avec le plus grand sérieux du monde et où la caricature de notre civilisation se mêle aux vieux usages siamois; rien de burlesque comme le groupe de tous ces hommes accroupis pieds nus, la tête surmontée de leur touffe de cheveux hérissés et qui semblent avoir pillé, pour composer leurs costumes hétéroclites, un vieux fonds de friperie européenne; et cependant, il ne faudrait pas croire que l'imitation comique de nos coutumes atteste de leur part un hommage pur et simple à notre supériorité. Ils nous copient, mais à leur corps défendant, et la plupart pleins de morgue et d'orgueil, nous détestent du fond du cœur et s'estiment très-supérieurs à nous.

En sa qualité d'astronome, le roi devait être impatient de voir notre installation; aussi, à peine étions-nous de retour à nos cases, que nous aperçûmes un grand mouvement du côté du palais; c'était le roi qui venait nous rendre visite.

Bientôt le cortège fit son entrée : en tête marchait une musique organisée à la française jouant le *God save the King* (outre cet air, son ré-

pertoire en comprend, dit-on, deux autres : *Partant pour la Syrie et la Marseillaise*). Après la musique, venaient successivement une troupe d'élite armée de carabines-revolvers, l'artillerie conduisant deux pièces de canons, une escouade armée de tromblons, puis le corps d'armée, composé de deux ou trois cents hommes, vêtus à peu près comme les Cipayes. Après la troupe, s'avancait le groupe des dignitaires, les uns portant le parasol royal, les autres l'éventail ou la boîte à bétel, etc., toutes prérogatives qui, chez les Siamois, constituent, à des degrés divers, les plus hautes marques de faveur; enfin venait le roi dans une sorte d'américaine qu'il conduisait lui-même, à côté son fils aîné sur un joli cheval, et tout autour des jeunes gens de grandes familles qui, pliés en deux, couraient avec la voiture.

Le roi, qui jusqu'alors n'avait vu que de petites lunettes, fut vivement impressionné par les grandes dimensions de nos instruments. Il fallut lui en montrer tous les détails avec un soin minutieux. Le télescope de 40 centimètres surtout captivait son attention. Celui de 20 centimètres pouvant s'abaisser jusqu'à l'horizon, il put y voir les détails de son bateau ainsi que ceux d'un îlot situé en rade à une assez grande distance, et fut émerveillé par la netteté des images. Du reste, il s'y prenait fort bien pour mettre l'oculaire au point. Il connaissait les propriétés de la boussole et parut comprendre l'usage des appareils magnétiques; mais il fut impossible de lui expliquer comment la pendule sidérale communiquait au relai son battement de seconde. Tous les assistants s'obstinaient à n'y voir qu'un moyen commode de compter les battements du pouls.

De retour à son palais, le roi voulut sans doute nous donner une preuve de sa compétence astronomique, car le lendemain je recevais la lettre autographe suivante, que je transcris textuellement :

The astronomical statement of the King of Siam.

I beg to state truly that my knowledge of astronomical science was very less almost inconsiderable. I have studied this science firstly in Siamese and Peguen astronomy, wick had been adopted and some what translated from the ancient book of Hindus entitled Surigasiddhant Warahamihirah Kajumulant, and I have afterward only tested certain european books of astronomy and astronomical navigation geometry, and so I have understand better manner of astronomical calculation. In use logarith, secant, cosecant, sine, cosine, tangent,

cotangent, logarithm of number, etc., became acquainted with various astronomical terms in latin and english on certain way but my knowledge of algebra, etc., is not sufficient for accurate calculation. I have compared with some knowledge of geographical observations at apprehended the place of the central eclipse which we may be able to stand and see the present solar total eclipse in duration as great as obtainable on Land. But I observed that most duration than that which will be here, will be fallen at about middle of the gulf of Siam towardest ward inclined south-west where there is no land to be standing steadily and see will the duration of the total darkness thither may be more than here about only two or three seconds of minute. But to point directly the place of most durable point of land my knowledge is not sufficient. I do not understand of using various instruments which were not in my possession. I have only a few telescopes large and small they in comparison with those newly invented and improved must be considered as very common.

The knowledge of Siamese and Peguen astronomers are thus.

The total eclipse of the Sun may take place for the following important points of astronomical occurrence :

1. The node either ascending as descending become near to the Sun's apogee either before or behind at distance as least as 60 degrees on the ecliptic course.
2. The Moon perigee become near to the place of syzygy straight between centres of the Sun and Moon and the Earth or near to the said nodal position.
3. The Sun become near to the said nodal position as 720 miles or 12 degrees in ecliptic.

The said also that whenever the interior planet Mercury or Venus and Moon become below the Sun directly to any latitude of place on the surface of the Earth the extractive power of those said bodies extract the surface of the Earth and produce greater rains and clouds more than usual on that for several days. It is evident that the like or similar occurrence can be compared with extraction of the Sun and the Moon produce high water on surface of the Earth on the days new Moon and full Moon always and lowest water appeared on first and last quarters of the lunar month for the Sun and the Moon are very distant position toward the Earth.

But the wider knowledge was not to me more than fore said indeed.

S. P. P. MONG KUT, K. S.

Tout se trouvait préparé pour l'observation de l'éclipse. Les personnes qui devaient y concourir étaient :

MM. STEPHAN,
TISSERAND,
RAYET,
CHABIRAND,
HATT,
OLRY,
LETOURNEUR et BÉHIC,
PIERRE,
GARNAULT, pharmacien de l'hôpital militaire de Saïgon,
Les Officiers de la *Sarthe* et du *Frelon*.

Pour la partie de ce récit, qui se rapporte directement à l'observation de l'éclipse, je reproduirai presque textuellement la portion correspondante du Rapport que j'ai précédemment adressé au Ministre, et qui a été rédigé sous l'impression du premier moment.

J'avais proposé à mes collaborateurs le programme suivant, qui fut accepté.

Le premier contact serait noté par MM. Stephan au grand télescope, Tisserand à l'équatorial, Rayet au télescope de 0^m,20, Hatt avec une petite lunette méridienne portative, disposée en altazimut, Olry avec une faible lunette terrestre.

Dans l'intervalle d'une heure et demie environ, séparant le premier contact du second, MM. Tisserand, Hatt, Stephan observeraient les cornes du croissant, ainsi que les occultations des taches et des facules; dans le cas où la partie du disque de la Lune extérieure au Soleil serait visible, ils chercheraient à en apprécier les variations de clarté. Pendant ce temps, MM. Rayet et Chabirand, munis de spectroscopes, étudieraient le spectre du Soleil, afin d'être mieux à même d'y saisir quelques modifications, quand la portion visible du Soleil serait réduite à un très-mince filet lumineux.

Quelques minutes avant le deuxième contact, jusqu'à trente secondes environ avant l'heure calculée pour ce contact, MM. Tisserand et Stephan devaient chercher, avec leurs instruments plus puissants, à saisir sur le bord occidental de la Lune, la naissance des premières protubé-

rances, pendant que MM. Rayet et Chabirand examineraient le spectre fourni par l'extrême bord du Soleil.

Le deuxième contact serait observé par MM. Hatt et Olry, ainsi que par MM. Tisserand et Stephan, s'il était possible. A partir de ce moment, ces deux derniers observateurs donneraient tous leurs soins à la mesure des protubérances comme position et comme grandeur; MM. Rayet et Chabirand en examineraient le spectre; M. Olry exécuterait un dessin de l'ensemble avec une forte jumelle; M. Hatt, à qui j'avais remis un spectroscopie à grand champ, devait le pointer rapidement à la main vers le Soleil et noter en gros s'il apercevrait des raies brillantes. Enfin, toutes les personnes munies de lunettes devaient être attentives aux phénomènes imprévus et bizarres signalés par quelques observateurs, tels que des lueurs sur la Lune, le Trou d'Ulloa, etc.

MM. Letourneur et Béhic s'étaient chargés, le premier d'un polariscopie de Savart, le deuxième d'un polariscopie d'Arago; ils devaient rechercher si l'effet produit reste le même, selon que l'on dirige l'instrument vers la Couronne ou vers une autre région du ciel.

M. Garnault s'occuperait des observations magnétiques et des trois thermomètres à boule libre, noircie et argentée, qui étaient exposés au Soleil; enfin, MM. les Officiers de la *Sarthe* et du *Frelon* avaient bien voulu nous prêter leur concours pour les nombreuses observations de détail, telles que la mesure au sextant du diamètre de la Couronne, les bandes ondulatoires; la couleur du paysage, le degré d'obscurcissement de l'atmosphère, et à cet effet une carte avait été dressée pour qu'on pût y noter les étoiles devenues visibles.

Durant la seconde moitié de l'éclipse, les observations se reproduiraient dans un ordre inverse.

J'avais, d'autre part, prié M. Pierre de se placer le plus haut possible au moment du phénomène et de noter l'apparence générale du vaste horizon qu'il aurait sous les yeux, ainsi que les effets produits sur les plantes et sur les animaux.

Enfin le jour de l'éclipse arriva. La matinée fut assez belle: quelques légers nuages seulement traversaient l'air. Venant de la *Sarthe* à terre, M. Lefourneur avait aperçu de sa baleinière, avec une grande netteté, la lumière cendrée de la Lune. Mais vers 9 heures, le temps commença à se gâter. De gros nuages se formant sur Kow-Luang mon-

taient vers le zénith et passaient avec rapidité dans la direction du sud-ouest au nord-est; le ciel fut bientôt complètement couvert.

Le premier contact fut invisible. Les nuages s'amoncelaient de manière à faire redouter un grain violent; déjà il pleuvait au-dessus d'un petit village appelé Wha-Whan, à quelques milles vers le nord-est. L'éclipse était fort avancée, et c'est à peine si nous avons pu la constater à travers quelques rares éclaircies. Tout nous semblait perdu, lorsque vingt minutes environ avant la totalité, et comme par faveur spéciale, les nuages s'arrêtent, puis se dissipent peu à peu, et dix minutes après, dans une région assez étendue tout autour du Soleil, le ciel devient magnifique.

A ce moment, je jetai un coup d'œil autour de moi : les divers objets, noyés dans une demi-obscurité ne ressemblant ni à l'aube ni au crépuscule, projetaient, tout en conservant leur couleur propre, un reflet caractéristique; le ciel, en s'assombrissant rapidement, me semblait tendre vers cette nuance violacée, qu'on appelle en physique la *teinte sensible*; d'autre part, les hommes des équipages mis en sentinelle pour empêcher l'approche des indiscrets, ou pour nous aider dans la manœuvre des instruments, étaient devenus silencieux et immobiles. Il y avait vraiment dans cet ensemble de quoi impressionner l'esprit le moins enclin à l'enthousiasme. Mais nous ne pouvions nous arrêter à le contempler.

Soudain, m'a-t-on dit, comme disparaissait le dernier rayon de Soleil, se montrèrent dans tout leur éclat, même à l'œil nu, la Couronne, les gloires et les protubérances : spectacle splendide dont l'apparition fut saluée par un cri contenu d'admiration.

Dans le grand télescope, les protubérances apparaissaient avec une merveilleuse netteté, telles qu'elles sont figurées dans les planches que nous avons fait exécuter d'après des dessins de MM. Olry et Bordes, et d'après mes propres mesures.

En *a* (*fig. 1*), on voit une petite protubérance dentelée, en *c* une deuxième de même forme, mais de dimension plus considérable, en *b* une protubérance allongée d'une hauteur extraordinaire; enfin en *d* une large plage de protubérances à l'aspect moutonneux.

Tous ces corps, à contours parfaitement tranchés, semblaient tenir au disque de la Lune par une base très-nette; aucun d'eux n'était flot-

tant. Ils me produisaient exactement l'effet de flammes. Leur couleur était celle du corail rose, légèrement teinté de violet. La grande protubérance *b* présentait des tons d'intensité différente, comme si la portion intérieure eût affecté la forme hélicoïdale.

Fig. 1.



J'employais, pour mesurer la hauteur et l'angle de position de ces corps, le micromètre imaginé par M. Villarceau pour l'éclipse de 1860. Il se compose d'un système de cinq gros fils parallèles, dont la distance mutuelle est de $53''{,}4$, et d'un sixième fil perpendiculaire aux premiers. L'ensemble de ces fils est porté par une monture de laiton qui peut tourner à frottement dans une douille fixe, en entraînant une petite règle. La douille maintient un carton sur lequel s'applique la règle, le long de laquelle il suffit de promener un crayon, pour fixer la portion angulaire du micromètre. Cette disposition, dispensant des lectures, permet d'opérer même dans l'obscurité.

J'avais surtout en vue de rechercher si les protubérances tiennent au Soleil ou à la Lune. Un rapide coup d'œil m'ayant fait juger que les angles de position ne devaient varier que fort peu, eu égard à l'orientation des protubérances, par rapport au diamètre parcouru par le centre de la Lune, je m'attachai seulement à multiplier les mesures des hauteurs, les variations de ces dernières ne devant être affectées que d'une manière insensible par de petits changements dans les angles de position. On reconnaît, en effet, après coup, que l'angle de position de la grande protubérance *b* n'a pas varié de 5 degrés depuis le deuxième jusqu'au troisième contact; pour les autres, la variation est beaucoup moindre.

Les nombres trouvés sont les suivants :

	Temps moyen de Wha-Tonne.	Hauteurs.	Angles de position comptés du Nord vers l'Est.
Protubérance <i>a</i>	23. ^h 40. ^m 1	1,52	123°,5
	23.44.31	0,00	
Protubérance <i>b</i>	23.40.41	2,43	72,8
	23.41.38	2,05	
	23.42.21	1,96	
	23.45.41	1,07	
	23.46. 0	0,98	
Protubérance <i>c</i>	23.44.59	1,78	316,6
	23.45.21	1,76	

Le nombre 123°,5 n'est pas le résultat d'une mesure.

On a évalué, par l'estime, que l'angle de la protubérance *a* avec le point de contact était de 10 degrés comptés vers le sud.

La protubérance *c* était encore visible quinze secondes après la réapparition du Soleil.

L'observatoire se trouvait situé presque exactement sur la ligne centrale, il en résulte qu'on peut considérer les points où se sont produits le deuxième et le troisième contact sur le bord du disque lunaire, comme diamétralement opposés. Nous admettrons, ce qui diffère extrêmement peu de la vérité, que le centre de la Lune a décrit sur le Soleil un diamètre faisant un angle de 23 degrés avec la direction du mouvement diurne. A l'aide de cette donnée et des angles de position inscrits plus haut, il est très-facile de calculer les variations de hauteur des protubérances.

Soient (*fig. 2*)

O le centre de la Lune;

A celui du Soleil;

EF le diamètre direct sur le disque de la Lune par le centre du Soleil;

r' le rayon de la Lune;

r la distance du centre du Soleil à l'extrémité d'une protubérance;

- α l'inclinaison invariable de l'axe de la protubérance sur le diamètre parcouru;
 ω l'angle compris entre le même diamètre et le rayon de la Lune mené à la base de la protubérance.

Ce que l'on mesure, c'est la hauteur CD projection sur OC de la pro-

Fig. 2.



tubérance; appelons ρ la longueur OD, et désignons OA par μt , le temps étant compté depuis le milieu de l'éclipse. On a

$$\rho = r \cos(\alpha - \omega) + \mu t \cos \omega.$$

En différentiant cette expression, on peut regarder ω comme constant, car la portion de la différentielle qui correspond à la variation de ω donne

$$r[\sin(\alpha - \omega) - \mu t \sin \omega] d\omega = CB \sin(\alpha - \omega) d\omega,$$

ce qui est une quantité absolument négligeable. Il reste alors

$$d\rho = \mu \cos \omega dt = \mu \cos \alpha dt.$$

En prenant la minute pour unité de temps, $\mu = 21'',18$.

Si l'on applique cette formule aux nombres fournis par l'observation, on trouve pour les différences entre chacun de ces nombres et le dernier du groupe dont il fait partie :

	Observation.	Calcul.
Protubérance a . . .	1,52	1,59
Protubérance b . . .	1,45	1,44
	1,07	1,19
	0,98	0,99
	0,09	0,08

L'accord ne saurait être plus satisfaisant, si l'on tient compte de la grossièreté du procédé de mesure. Il nous permet de conclure que les protubérances sont des dépendances du Soleil et non de la Lune.

De son côté, M. Rayet établissait d'une manière non douteuse que les protubérances ne sont point le résultat d'un jeu de lumière, mais bien des objets matériels, et qu'elles sont de nature gazéiforme.

L'appareil dont il faisait usage se composait d'un spectroscopé à vision directe, dont la fente était placée au foyer même du télescope de 0^m,20.

Ses recherches ont porté sur les deux points suivants :

1^o L'étude du spectre des cornes du croissant très-effilé qui persiste encore au moment où l'éclipse va devenir totale ;

2^o L'examen du spectre des protubérances.

Je reproduis le texte de son propre récit.

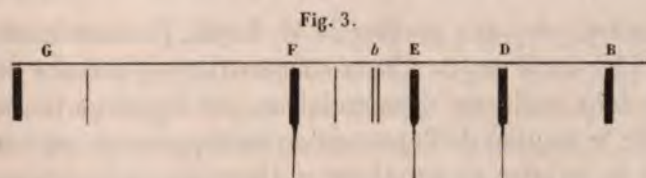
« *Spectre des cornes.* — La fente du spectroscopé étant orientée de manière à couper à angle droit l'image du croissant lumineux très-étroit qui devait rester quelques secondes avant l'obscurité totale, j'ai d'abord étudié la lumière de l'extrémité des cornes. Sur le fond d'un spectre à raies obscures très-nettes, formé par la lumière atmosphérique diffuse, on voyait une bande beaucoup plus lumineuse, qui était le spectre de la lumière émise par l'extrémité de la corne; quel que fût le peu de hauteur de cette partie, on n'y distinguait rien de particulier. Les raies m'ont paru avoir un aspect (largeur et intensité) identique à celui des raies du spectre ordinaire; il ne semble donc pas que la lumière émise très-obliquement par les bords du Soleil diffère notablement de celle du centre, ni que les rayons subissent une modification quelconque, en rasant les bords de la Lune. L'observation des cornes a toutefois été interrompue quelques instants avant l'éclipse totale.

« *Spectre des protubérances.* — Les observations des éclipses précédentes de 1842, 1851 et 1860 ayant laissé beaucoup d'incertitude sur l'intensité lumineuse des images roses, j'ai cru devoir donner à la fente du spectroscopé une ouverture un peu plus grande que celle dont je venais de faire usage pour l'examen des cornes. Cette largeur était d'ailleurs assez faible pour montrer encore les principales raies noires de Fraunhofer.

» Dès l'instant de l'obscurité totale, la fente du spectroscopie ayant été portée sur l'image de la longue protubérance qui se montrait alors sur le bord oriental du Soleil, je vis immédiatement une série de neuf lignes brillantes, très-brillantes même, se détachant sur un fond uniforme presque noir ou du moins d'un violacé très-obscur; aucune trace du spectre coloré donné par la couronne et pouvant servir de points de repère pour la mesure de la déviation des lignes brillantes; néanmoins, par leur disposition dans le champ, par leur espacement relatif, par leur couleur et enfin par la physionomie même de leur ensemble, ces lignes m'ont paru pouvoir être assimilées aux principales raies du spectre solaire, B, D, E, *b*, une ligne inconnue F et deux lignes du groupe G.

» Le résultat prévu, celui que j'espérais vérifier à mon départ de France, se montrait avec une évidence parfaite. La lumière des protubérances, analysée par le prisme, donne une série de lignes brillantes; ces corps sont donc des amas, des jets d'une matière gazeuse incandescente, les flammes d'un phénomène chimique d'une puissance extrême; car la protubérance examinée avait environ 3 minutes, soit à peu près 34 000 lieues de hauteur véritable.

» Pendant les observations précédentes, la fente du spectroscopie était parallèle à la grande longueur de la protubérance; aussi voyait-on, dans l'appareil, des lignes lumineuses d'une hauteur sensible en relation directe avec la hauteur de l'image focale de la protubérance. La fente ayant alors été tournée de 90 degrés, les raies se sont trouvées réduites à des lignes très-courtes, presque des points répondant à la faible largeur de la corne lumineuse considérée. Les lignes brillantes représentent donc bien le spectre de la lumière propre des protubérances, puisque leur hauteur change avec l'orientation de la fente.



» La fente ayant été replacée dans sa première position, parallèle à la hauteur de la corne, je fis à la hâte un croquis grossier du phéno-

mène : ce croquis est reproduit dans le dessin ci-joint (*fig. 3*), où je me suis efforcé de donner aux divers traits une épaisseur proportionnelle à l'intensité lumineuse des lignes qu'ils figurent.

• Les lignes les plus vives, les plus éclatantes étaient la ligne rouge, la ligne jaune D, la ligne verte E, la ligne bleue F, et enfin la ligne violette la plus réfrangible; les autres étaient beaucoup plus faibles et surtout offraient une largeur beaucoup moindre.

• Toutes les lignes se terminaient brusquement au point du champ qui répondait au bord de la Lune; mais, de l'autre côté, vers celui de l'atmosphère solaire, elles se prolongeaient d'une manière inégale. Les lignes très-vives, D, E, F, se continuaient au delà de la longueur moyenne par un trait lumineux très-faible, qui leur donnait environ une hauteur double des voisines. Une certaine partie des gaz incandescents, qui forment les protubérances (ceux auxquels répondent les lignes D, E, F), se répand donc dans l'atmosphère solaire au delà des limites que l'œil assigne en général à ces expansions.

• L'examen de cette protubérance étant terminé, je mis la fente sur la grande région lumineuse qui était à l'occident du Soleil. Le spectre s'est, cette fois encore, montré composé de lignes brillantes, disposées comme dans le premier cas; seulement, je n'ai vu qu'une seule ligne violette. Toutes les protubérances ne semblent donc point identiques.

• Si maintenant nous voulions quitter le domaine de l'observation et de la certitude, nous pourrions conclure, de l'existence de certaines raies brillantes, à la composition chimique des protubérances; mais ceci me semble tout à fait téméraire, car nous savons que le spectre d'un même gaz varie avec les conditions où il devient incandescent, et nous n'avons aucune connaissance des températures à la surface du Soleil. »

Je n'ajouterai rien aux paroles de M. Rayet, j'insiste seulement sur l'heureuse idée qu'il eut de placer successivement la fente du spectroscopie dans deux positions rectangulaires, par rapport à la grande protubérance *b*; le résultat de l'observation en reçoit une signification très-précise. Par là, en effet, on est assuré que les raies brillantes proviennent bien des protubérances seules, et qu'aucune lumière émanant d'une source différente n'intervient dans la production du phénomène.

Les raies brillantes furent également aperçues par M. Hatt; mais cet observateur, ne disposant que d'un appareil beaucoup moins parfait que celui de M. Rayet, vit deux raies seulement.

Il n'est pas douteux que les protubérances aient été visibles de tout temps, mais elles n'ont été reconnues et décrites avec netteté que depuis 1842. En 1860, MM. Y. Villarceau et Chacornac, par des observations effectuées en Espagne, avaient déjà, comme nous l'avons indiqué plus haut, été portés à conclure, au moins avec une forte probabilité, que ces corps sont des dépendances du Soleil et de la Lune. Toutefois, ce sujet était resté dans le vague. Voici avec quelle réserve s'exprimait à cette époque M. Léon Foucault, après une dissertation sur la Couronne et les gloires : « Quant aux appendices rougeâtres, on ne saurait s'en rendre compte par les seules lois de la diffraction; mais comme ils s'étendent beaucoup moins loin que l'auréole, comme leur distribution ne laisse apercevoir aucune relation connue avec la configuration du profil de la Lune, on n'a véritablement aucune raison de leur contester une existence réelle.

» Laissons donc *jusqu'à plus ample examen* les protubérances au Soleil. »

Nous ne craignons pas de le dire, aujourd'hui l'examen est fait. Après la belle observation de M. Rayet, il n'est plus possible d'admettre que les protubérances soient des jeux de lumière; *pour ce qui est de tenir à la Lune*, cette opinion ne saurait se produire après les expériences de 1860 et les nôtres.

Absorbé par la mesure des protubérances, il m'a été impossible d'examiner la Couronne dans toute son étendue, je ne l'ai observée que dans la portion située au-dessus du groupe *d*. Elle y affectait très-nettement la forme en écheveau recourbé, dont parle Arago. Sa couleur était tout à fait blanche.

D'après les dessins de MM. Olry et Bordes, dont nous donnons la reproduction à la fin de cet article, on voit que la Couronne était traversée par quatre groupes de jets très-étendus ou gloires correspondant sensiblement par leurs positions à celles des protubérances. Ce résultat n'est pas d'accord avec celui qu'obtint en 1860 M. Léon Foucault, par l'examen de photographies assez imparfaites. L'illustre physicien, après avoir signalé une sorte de relation entre les inégalités du contour

lunaire et la position des gloires, incline à penser que ces dernières sont un pur effet de diffraction. L'argumentation de Foucault est basée sur le fait de la rapide décroissance de la lumière, à partir du bord de la Lune; mais nous pensons que ce dernier détail, incomplètement rendu par les épreuves daguerriennes, a conduit à une fausse interprétation du phénomène. « Du côté où venait d'avoir lieu le contact intérieur de M. Foucault, ce contour circulaire accuse un renforcement d'intensité qui confirme d'une manière authentique l'impression déjà signalée par M. Le Verrier. »

Nous aussi, nous avons vu ce renforcement d'intensité et la décroissance rapide; mais cela nous paraît se passer au voisinage du bord du Soleil et non pas de celui de la Lune; nous reviendrons tout à l'heure sur la description exacte de ces derniers détails. Quant à présent, nous devons constater qu'à Wha-Tonne les gloires ont paru correspondre aux protubérances. Or, si nous rapprochons ce fait d'un autre, postérieurement découvert par M. Lockyer, à savoir: que la matière rosée est disséminée sur toute la surface du Soleil, n'est-il pas très-simple de supposer que cette matière répand dans l'immense atmosphère solaire des vapeurs ou encore une illumination spéciale qui produit l'auréole? Les points où la condensation est plus considérable et donne lieu aux protubérances proprement dites doivent alors, ainsi qu'on l'observe, présenter des jets de lumière plus élevés.

Avant d'être témoin du phénomène, je pensais qu'au moment où l'éclipse devient totale, toute lumière vive s'évanouit brusquement et qu'aucune méprise dans l'évaluation de l'instant du contact ne devrait se produire avec une lunette bien réglée. Il n'en est point ainsi. Après la disparition complète du Soleil, il subsiste encore, pendant quelques secondes, dans la région où s'est produite la tangence des deux disques, un filet lumineux très-mince, bien limité extérieurement et d'un éclat tellement intense, qu'il peut induire en erreur sur la réalité du contact. L'effet est d'autant plus marqué, que la lunette est plus puissante: avec une jumelle, M. Olry n'en eut pas conscience; dans le grand télescope, au contraire, il me parut tellement net, que je n'hésite pas à considérer le globe proprement dit du Soleil comme entouré d'une couche très-mince, diaphane et excessivement brillante. La même apparence s'est montrée à M. Tisserand, dans la lunette de Cauche, et

je dis tout de suite qu'elle s'est présentée en sens inverse lors du troisième contact. C'est cette couche qui produit, dans les images photographiques obtenues immédiatement après le deuxième contact ou avant le troisième, le renforcement de lumière dont parle Foucault.

L'existence de l'enveloppe brillante permet d'expliquer les fortes divergences qui se sont présentées dans certains cas pour plusieurs personnes observant la même éclipse avec des instruments dissimilaires. Dans le cas actuel, j'ai conscience d'avoir noté, non pas le deuxième contact, mais l'occultation par la Lune du bord extérieur de l'enveloppe brillante; M. Tisserand, tout en distinguant cette dernière, est sûr d'avoir marqué l'instant même du contact; M. Hatt, sans faire la distinction, a continué de compter jusqu'à la disparition de toute lumière; M. Olry, avec sa lunette extrêmement faible, n'a pu voir que le contact. Il résulte de là que ces observations doivent être réparties en deux groupes: le premier comprenant celles de MM. Tisserand et Olry; le second celle de M. Hatt et la mienne. On a ainsi trouvé en temps moyen de Wha-Tonne :

Deuxième contact.....	{	Tisserand.....	^m 23.39. ^h 23, ^s 1
		Olry.....	23.39.23,8
		Moyenne....	23.39.23,45
Occultation de la couche brillante.....	{	Stephan.....	23.39.35,9
		Hatt.....	23.39.35,1
		Moyenne....	23.39.35,5

La différence des deux moyennes nous donne, pour épaisseur de la couche, 4",4.

Le troisième contact fut observé par MM. Tisserand et Hatt, qui trouvèrent (*) :

Tisserand.....	^h 23.46. ^m 9, ^s 1
Hatt.....	23.46.3,1

(*) M. Olry, occupé de son dessin, et M. Stephan, des protubérances, ne purent observer ce contact.

De ces nombres, on conclut, pour la longitude de Wha-Tonne, les valeurs suivantes :

Premier contact (Tisserand et Olry).....	6 ^h 29 ^m 49 ^s ,0
Deuxième contact (Tisserand).....	6.29.46,3
Deuxième contact (Hatt).....	6.29.42,9

Le premier nombre résulte de la moyenne de deux observations presque identiques à chacune desquelles nous attribuons pour ce motif un poids double des deux dernières; par conséquent 6^h 29^m 49^s,0 doit recevoir le poids 4. Nous trouvons ainsi pour la longitude adoptée

$$6^h 29^m 47^s,5.$$

Un peu avant la totalité, le bord de la Lune occulte deux belles taches situées près du bord oriental du Soleil. M. Tisserand et M. Hatt observèrent ces occultations. Si je relate ce fait, c'est pour mentionner une remarque simultanée des deux observateurs. Il parut à chacun d'eux que, durant le passage de la tache derrière la Lune, le mouvement de cette dernière était accéléré; en d'autres termes, la tache semble comme aspirée par la Lune. On sait, d'autre part, que quand une étoile est occultée par la Lune, elle semble franchir d'un bond le petit intervalle qui la sépare du bord un peu avant l'immersion; tandis qu'au moment de l'émersion, l'étoile apparaît un instant à l'intérieur du disque. Tous ces faits sont de même ordre et facilement explicables par ce principe si bien établi par M. Wolf, dans son Mémoire sur l'équation personnelle : que, quand deux corps angulairement très-rapprochés ont un déplacement relatif, leur distance véritable semble altérée d'une petite quantité de sens contraire à celui du mouvement. Il suit de là, qu'au moment où l'étoile va s'éteindre, elle paraît encore distante du bord d'une quantité appréciable : d'où l'illusion d'un petit bond vers le disque à l'instant même où l'extinction se produit. L'effet est inverse à la sortie.

Une demi-heure environ après le troisième contact, les nuages se reformèrent, et le quatrième contact fut invisible.

Sans doute il est regrettable que le premier et le quatrième contact n'aient pu être observés; mais notre longitude n'étant pas exactement connue, cette lacune est peu de chose. Pendant toute la partie du phénomène intéressante au point de vue physique, le ciel se maintint su-

perbe tout autour du Soleil : après nos craintes premières, nous nous trouvions trop heureux de ce résultat.

Les observations de détail, sauf celle de M. Pierre, que nous ferons connaître tout à l'heure, ne présentent pas un grand intérêt.

Quelques-uns des officiers de la *Sarthe* cherchèrent à mesurer le diamètre de la Couronne, mais sans succès.

La polariscopie ne donna que des résultats négatifs. Mais nous sommes loin d'en conclure qu'il n'y ait rien à trouver dans ce sens, en adoptant un mode d'observation plus précis.

L'obscurité fut assez intense durant la totalité. En plein air, on distinguait aisément des caractères d'écriture; mais à l'intérieur de la cabane de l'équatorial, M. Tisserand fut obligé de prendre une lampe pour lire le tambour de son micromètre. Cinq étoiles seulement devinrent visibles : il faut attribuer ce petit nombre à la présence des nuages qui couvraient une partie du ciel, car la région du firmament qui se trouvait alors au-dessus de l'horizon est une des plus riches en belles constellations. D'après M. Letourneur, l'ombre portée du toit de notre habitation ne cesse pas d'être apparente.

Aucun de nous n'aperçut de distorsion dans les cornes du croissant, ni le phénomène des grains de chapelet, ni de points brillants sur la surface de la Lune.

« L'état du ciel, dit M. Rayet, a vivement contrarié les observations météorologiques; dans les irrégularités des nombres, il est difficile de faire la part de ce qui doit être attribué au passage des grains ou des nuages, et de ce qui revient à l'obscurcissement graduel du Soleil.

• Le baromètre a conservé pendant toute la durée de l'éclipse la marche décroissante qui lui est habituelle dans cette période du jour.

• La température à l'ombre et au Soleil a subi un décroissement marqué au moment de la totalité, mais l'effet est moins accentué que dans le cas ordinaire.

• Le vent a faibli au moment de l'éclipse totale, la marche des nuages s'est ralentie, mais nous n'avons pu observer, comme dans les éclipses précédentes, un changement dans la direction du vent.

• L'aiguille de déclinaison n'a éprouvé aucune perturbation sensible, et si quelques irrégularités existent dans les nombres qui expriment

la déclinaison, elles sont de l'ordre de celles que l'on rencontre en faisant des observations semblables un jour quelconque.

» Nous avons placé à la fin du Mémoire le tableau des observations météorologiques pendant l'éclipse.

» Le surlendemain de l'éclipse, M. Pierre revint de son excursion dans la montagne. Pendant toute la durée du phénomène, il s'était livré à des observations consciencieuses qu'il a bien voulu consigner dans une lettre, dont je vais reproduire quelques passages :

- « J'avais, dit M. Pierre, choisi, au sommet de la montagne Luang,
- » un point très-découvert qui me permettait d'embrasser un horizon
- » d'une dizaine de lieues.
- » J'étais à ce point d'observation à 8^h 30^m du matin. »

Alors M. Pierre énumère les signes d'inquiétude qu'il a cru reconnaître chez des singes du genre *Semnopithèque*, *Truceros* et quelques autres espèces. Il conclut en disant qu'il n'oserait attribuer les manifestations insolites de ces animaux à l'obscurcissement du Soleil. Elles ont eu plutôt pour cause sa propre présence. Cependant il n'est pas douteux que les éclipses n'aient une influence sur quelques animaux; ainsi, les volailles qui couraient autour de nos cases regagnèrent leur nid, et quand le Soleil réapparut, un coq chanta.

L'effet a été de même fort peu sensible pour les plantes.

Je transcris maintenant la fin de la lettre où se trouve consignée une très-curieuse observation d'un ordre tout différent :

« Il me reste à vous parler des bandes lumineuses que j'ai aperçues onze fois durant le cours de l'éclipse. La Lune avait envahi les-deux dixièmes du Soleil quand elles ont commencé à paraître à l'horizon. J'en ai compté d'abord trois, puis sept; mais jamais ce nombre n'a été dépassé. Perpendiculaires à l'horizon et parallèles entre elles, elles présentaient une largeur imaginative de 60 centimètres. Elles paraissaient et disparaissaient suivant les ondulations de l'atmosphère; mais elles réapparaissaient toujours au même point de l'horizon. Elles n'offraient pas toutes le même éclat. Elles passaient par toutes les nuances du rouge au pourpre violet. Il m'a paru que ces bandes de gauche à droite, ou du nord au sud, n'offraient pas à la fois le même

degré d'intensité lumineuse. Ainsi, la dernière au sud-est était pourpre quand celle qui était présente à l'extrémité de l'arc contre Kow-Luang-Wong était légèrement teintée de rouge. »

Nous ne chercherons pas à expliquer le phénomène si net dont M. Pierre nous donne la description. Nous ajoutons seulement à son récit cette remarque que, selon toute vraisemblance, les bandes ondulatoires, les ombres courant sur le sol, signalées à différentes reprises par divers observateurs, n'étaient qu'une manifestation partielle du même fait.

Nous résumons, comme il suit, les résultats qui découlent des observations précédentes :

Le Soleil est entouré d'une couche diaphane très-brillante, d'une épaisseur moyenne de 4 à 5 secondes d'arc, au travers de laquelle on aperçoit le globe proprement dit.

Sur cette surface, est répandue à profusion une matière gazeuse enflammée qui, en certains points, se condense en forme de jets d'une lumière rosée, pouvant s'élever jusqu'à 3 minutes de hauteur.

Outre ces faits, directement déduits de l'observation, nous admettons qu'il existe autour du Soleil une immense atmosphère gazeuse dont la région inférieure, illuminée par la matière des protubérances ou remplie par les vapeurs qu'émettent celles-ci, donne lieu aux phénomènes de l'auréole et des gloires.

Les coordonnées géographiques de Wha-Tonne sont :

Longitude comptée à l'est de Paris.....	6 ^h 29 ^m 47 ^s ,5
Latitude boréale.....	11°,42',35",0

Un capitaine anglais accompagnant le gouverneur de Singapore essaya de photographier l'éclipse; mais les épreuves ne nous furent pas communiquées, et je ne crois pas que les résultats obtenus aient été très-remarquables.

Le roi de Siam, de son côté, avait observé l'éclipse : à chaque contact, sur un signe de lui, un coup de canon avait été tiré et tout le peuple avait été saisi d'admiration pour la science de son souverain.

Le soir, une invitation du Ministre des Affaires étrangères nous appelait au Palais pour assister à une représentation dramatique.

Le roi était ravi, il nous raconta ses impressions avec détails : *Very difficult observation*, disait-il, *but very beautiful*; il nous fit comprendre que les résultats obtenus concordaient de tous points avec ses prévisions, entra dans une dissertation étendue et assez incompréhensible sur l'astronomie en général; puis revint à son sujet favori, la question des marées.

Pendant ce temps, dans un coin de la galerie, une musique siamoise préludait bruyamment à la fête. L'orchestre comprend au premier rang de grands harmonicas, formés avec des timbres et des planchettes de bois sur lesquels les virtuoses indigènes, au moyen de petits marteaux de bois dur, frappent avec une vitesse vertigineuse; derrière ceux-ci sont placés les instruments à vent, qui ressemblent beaucoup aux bignous de nos contrées; puis viennent des sortes de chapeaux chinois et les gongs qu'on fait résonner à tour de bras. De cet ensemble sort un thème, dont la mélodie très-simple n'est pas absolument désagréable, et sur lequel les artistes brodent une myriade de notes, des fioritures à l'infini.

Au pied de l'estrade royale est dressée une manière de petit autel garni de fleurs artificielles, de deux petits cierges non allumés et d'une lampe qui brûle.

Tout étant prêt, le roi donna le signal.

Ce genre de divertissement, qui semble emprunté à l'Inde, porte le nom de *lakone*, chez les Siamois. Ceux-ci y apportent une véritable passion et, dans les grandes circonstances, il y a, dit-on, des *lakones* qui durent plusieurs jours et plusieurs nuits.

Ce n'est pas, à proprement parler, une représentation dramatique dans le sens que nous attachons à ces mots. C'est plutôt l'exposition chantée d'une interminable épopée mythologique. Le fond, toujours le même, est la grande querelle légendaire du peuple des singes avec le peuple de Brahma. Sur cette donnée, les auteurs, donnant carrière à toutes les fantaisies de leur imagination, inventent les épisodes les plus variés, qu'ils soudent les uns aux autres, le tout entremêlé de danses et d'une foule d'incidents allégoriques.

D'abord, se présentent deux danseuses superbement vêtues d'étoffes de soie dorée, les hanches nues, la tête couverte d'une sorte de tiare, les ongles engagés dans ces longs étuis d'or effilés originaires de la

Chine. Elles s'avancent par mouvements lents et cadencés, contournant leurs bras d'une manière bizarre qui rappelle les allures du serpent et frappant le sol en mesure avec le pied, tout en maintenant les mains dans cette pose qu'on assigne généralement aux idoles de Boudha. Après avoir fait une gémflexion devant le roi, elles allument les petits cierges et continuent leurs exercices.

Par leur attitude, quoique leur figure reste impassible, elles doivent initier le spectateur au sujet de l'épisode. Une série d'autres couples, ne différant de celui-ci que par des détails dans les toilettes et les poses, viennent successivement le remplacer; puis après ce prologue, une voix suraiguë s'élève dans la coulisse et chante, avec des modulations toutes particulières, une longue strophe du poëme. Après ces chants, retour des poses : cette fois ce sont des singes fantastiques qui gambadent de la manière la plus grotesque; puis vient un jeune couple amoureux poursuivi par un de ces animaux; après quoi la cantatrice reprend, et ainsi de suite. Au bout de deux heures de ce régime, nous étions abasourdis, et nous primes congé du roi.

Les Siamois firent sur-le-champ leurs préparatifs de départ. Dès le lendemain, presque tous avaient quitté Wha-Tonne. De notre côté, nous nous disposâmes à les imiter.

Le point de la côte où nous étions établis est aussi insalubre que possible, surtout à cette époque de l'année. Les terrains entièrement marécageux que recouvre la forêt, piétinés d'ailleurs dans tous les sens par les ouvriers qui allaient y couper des bois et par les troupeaux du roi, dégageaient en abondance des miasmes que nous apportaient les vents réguliers du sud-ouest. L'effet de ces exhalaisons produisit bientôt son effet sur les équipages : presque tous ceux des hommes qui avaient séjourné à terre se trouvaient actuellement à l'infirmerie; l'un des officiers, M. Courgeolles, venait d'être pris par une grave affection du foie; le lendemain de l'éclipse, M. Garnault et notre mécanicien furent atteints d'une fièvre violente; enfin M. Pierre était revenu de Kow-Luang dans un état de santé des plus fâcheux. Dans ces conditions, je ne pouvais que me prêter au désir de M. le commandant Letourneur et activer notre départ le plus possible. L'état du ciel nous ayant permis de faire une dernière série à la lunette méridienne pour nous assurer de la correction de la pendule, nous pûmes commencer immédiatement à rem-

barquer nos instruments. Le lendemain, nous regagnions nous-mêmes la *Sarthe*.

L'avouerai-je, je ne laissais pas ce pays sans une sorte de regrets. Les émotions diverses occasionnées par nos travaux, notre réussite un instant si compromise, les relations cordiales qui n'avaient cessé de régner dans notre petite colonie, enfin ces conditions d'existence si nouvelles constituaient un ensemble d'impressions dont le souvenir était et reste pour moi d'un charme véritable.

Partis du mouillage de Kow-Luem, le 21 à 1 heure du matin, la *Sarthe* nous déposait à Saïgon le 23, à 4 heures du soir. Durant cette traversée rapide, le régime atmosphérique nous parut, vers le milieu du golfe, tout différent de ce qu'il est sur la côte de la presqu'île. A Wha-Tonne, le ciel était généralement couvert, fréquemment traversé par des grains violents; en pleine mer, au contraire, nous trouvâmes le temps presque constamment beau. La même remarque s'applique à notre premier voyage de Singapore à Wha-Tonne. En arrivant à Saïgon, nous retrouvions les pluies.

Il est presque superflu de dire que notre première visite fut pour le Gouverneur. Nous avons hâte de témoigner à M. l'amiral Ohier notre vive reconnaissance pour le concours éclairé qu'il avait bien voulu prêter à notre expédition.

Nous n'éprouvons aucun embarras à déclarer que sans M. Hatt et la Marine, il nous aurait été matériellement impossible de nous fixer à Wha-Tonne et d'y effectuer nos observations.

M. Hatt ayant mis à notre disposition son Observatoire, nous fîmes descendre à terre sur-le-champ le cercle méridien et nous l'installâmes dans la salle méridienne, dont nous voulions déterminer la latitude et rattacher la longitude à celle de Wha-Tonne.

Nous fûmes assez heureux, M. Tisserand et moi, pour rencontrer deux belles nuits, celle du 26 et celle du 27. Cela nous permit de trouver la correction de nos chronomètres et de déterminer la latitude.

Nous avions avec nous quatre chronomètres : deux de Winnerl, réglés sur le temps sidéral et portant les n^{os} 484 et 487; le chronomètre Leroy 284 et un compteur de Jacob : les deux premiers appartiennent à l'Observatoire, les deux autres nous avaient été prêtés par le Dépôt de la Marine.

La qualité tout exceptionnelle du chronomètre 484 est bien connue; pendant notre séjour à Wha-Tonne, sa marche était restée sensiblement nulle; toutefois, il fallait s'assurer le mieux possible que cette régularité avait subsisté pendant le transport de Wha-Tonne à Saïgon. Or, en comparant 484 et 487, on trouve une discordance indiquant que l'un des deux a mal marché. En rapprochant au contraire 484 W. et 284 L., on constate un accord complet: ainsi, supposant que la marche de 484 est restée sensiblement nulle, et adoptant pour 284 la marche diurne de $-1^s,90$ qu'il avait à terre, on trouve, le 28 à midi, pour la correction du deuxième chronomètre, déduite de celle du premier,

$$-5^h 26^m 19^s,5,$$

tandis que la comparaison directe fournit

$$-5^h 26^m 19^s,1.$$

Cet accord nous autorise à admettre que la correction de 484 est effectivement restée invariable.

Cette correction, par rapport au temps sidéral de Wha-Tonne, était égale à

$$+6^h 30^m 2^s,6.$$

Les observations de passages effectuées dans les nuits du 27 et du 28 nous donnent à Saïgon, pour la correction du même chronomètre,

$$+6^h 57^m 50^s,25.$$

La différence des longitudes est donc

$$27^m 47^s,6.$$

Nous ne dissimulons point que cette opération, pour être entièrement rigoureuse, eût dû être suivie d'un retour à Wha-Tonne; mais, outre que ce second voyage nous était absolument impossible, la longitude du point de départ n'étant qu'imparfaitement connue, nous ne pouvons prétendre donner pour celle de Saïgon un nombre entièrement exact.

Nos observations de distances zénithales nous ont fourni pour la latitude une valeur beaucoup plus sûre. Les séries du 27 et du 28 com-

prennent les mêmes étoiles au nombre de quinze; et, comme dans l'intervalle, la lunette a été retournée sans que la position du cercle ait été changée par rapport à l'axe, les erreurs de graduation se trouvent éliminées.

Nous avons ainsi trouvé, pour les coordonnées géographiques de Saïgon,

Longitude comptée à l'est de Paris...	6 ^h 57 ^m 35 ^s , 1,
Latitude boréale.....	10° 46' 47", 2.

Là se borne la partie scientifique de notre voyage.

J'aurais vivement désiré prolonger mon séjour en Cochinchine, m'y livrer à quelques études du ciel austral et parcourir ce curieux pays; mais la maladie, qui jusqu'alors nous avait épargnés, à l'exception de M. Hildebrand, nous atteignit à notre tour. Tous, successivement, nous fûmes pris par la fièvre, et l'un de nous, M. Chabirand, par un accès de violence telle, que les médecins nous prescrivirent de regagner l'Europe sans retard. Il fut donc décidé que nous prendrions le prochain courrier à la fin du mois. La *Sarthe* ayant reçu l'ordre de rentrer en France, nous y laissâmes nos caisses d'instruments et les chronomètres, dont M. le commandant voulut bien se charger. Cette combinaison nous offrait le double avantage d'économiser à l'État une somme assez ronde et d'éviter le transit égyptien.

La brièveté de notre séjour à Saïgon ne nous permit pas d'étudier à fond cette capitale de notre colonie, cependant nous pûmes en prendre une idée assez complète et visiter les points principaux des alentours.

La ville est bâtie sur les bords d'une large rivière, le Donnaï, que peuvent remonter facilement, à marée haute, les navires du plus fort tonnage. Le pays environnant, plat et marécageux, est d'une fécondité remarquable et se prête surtout à la culture du riz. Cette contrée, percée d'une foule de canaux, nommés *aroyos*, est facilement parcourue par les jonques qui portent à peu de frais, d'un point à l'autre, les matériaux et les travailleurs. A ces moyens de communication, se joignent de belles routes créées depuis notre occupation.

Les parties de la ville qui bordent la rivière étaient autrefois marécageuses et malsaines; mais le sol a été desséché, raffermi, et actuellement on y voit un beau boulevard garni de maisons et planté d'arbres.

Comme à Singapore, il y a à Saïgon un quartier européen et un quartier chinois. Le premier a l'aspect le plus riant. Les rues sont bien alignées, entretenues avec soin et bordées dans presque toute leur longueur de jardins, au milieu desquels les maisons sont construites. Quelques-unes de ces dernières sont vastes et d'une jolie architecture. La portion chinoise, séparée de l'autre par un aroyo, offre beaucoup d'analogie avec les quartiers chinois de Singapore; mais elle est encore assez peu étendue.

Saïgon possède un dépôt de charbon, un arsenal, un beau jardin botanique, dont M. Pierre est le créateur; et un vaste enclos, appelé *Parc du Gouvernement*, où l'on fait des essais de culture.

Il y règne un mouvement assez actif et même certaines allures d'élégance; on y rencontre beaucoup de voitures publiques ou particulières. Les habitudes sont d'ailleurs entièrement françaises.

A 4 kilomètres environ, se trouve une ville toute chinoise appelée Cholen. Malgré sa fondation récente, Cholen renferme déjà 30 000 Chinois à peu près. Ceux-ci servent d'intermédiaires entre les négociants européens et les Annamites, qui ne s'adressent guère directement à nous. Là on trouve les mœurs chinoises dans toute leur intégrité; plusieurs belles pagodes décorent la ville, et quelques maisons particulières appartenant à de riches commerçants sont fort remarquables. Cholen est relié à Saïgon par un large aroyo et par une belle route ombragée, dont le parcours constitue une charmante promenade.

Ne pouvant me livrer à une étude complète sur la Cochinchine, je me borne à cet aperçu sommaire.

Après avoir pris congé de M. le Gouverneur, de MM. Hatt, Olry et Pierre, des officiers du Génie, chez lesquels nous avons trouvé l'hospitalité la plus cordiale pendant tout notre séjour à Saïgon, nous nous embarquons de nouveau le 31 au matin sur l'*Impératrice*, le même paquebot qui nous avait amenés de France.

Je passerai rapidement sur les détails du retour. Il me faudrait revenir sur ce que j'ai déjà décrit. Je dirai seulement que l'air de la mer produisit le meilleur effet sur la santé de tout le monde. A Singapore, les accès de fièvre avaient presque disparu. L'état de M. Courgeolles lui-même, qui revenait aussi par l'*Impératrice*, s'améliora sensiblement de jour en jour.

Après une traversée assez pénible par la mousson contraire et une petite panique dans la mer Rouge, où la quille du bateau heurta légèrement un bas-fond, nous débarquions à Suez le 31 septembre dans la matinée.

MM. Tisserand et Hildebrand, dont la santé s'était altérée de nouveau dans les derniers jours, continuèrent directement leur voyage sur Alexandrie et Marseille. Pour nous, au contraire, MM. Rayet, Chabirand et moi, nous nous arrêtàmes en Égypte jusqu'au départ du paquebot suivant. Mais j'adressais à M. le Ministre de l'Instruction publique une lettre (*) assez étendue où je lui faisais connaître les résultats principaux de nos observations.

Nous tenions d'autant plus à profiter de l'occasion qui nous était offerte de visiter les travaux du Canal qu'à cette époque, d'un point à l'autre du parcours, on trouvait tous les degrés d'avancement.

On sait que la Compagnie dont M. de Lesseps est président a concédé l'exécution des digues et jetées à la maison Dussaud frères, qui a déjà fait ses preuves à Cherbourg et à Marseille, et le creusage du canal proprement dit à l'entreprise de MM. Borel et Lavallée. Cette partie du travail, depuis la Méditerranée jusqu'à la mer Rouge, est partagée en sections successives, à la tête de chacune desquelles se trouve un ingénieur spécial. Malgré la multiplicité de ces services, les voyageurs trouvent partout dans l'Isthme un accueil bienveillant et empressé qui rend le voyage aussi agréable que facile.

Suez n'était, il y a quelques années, qu'une bourgade arabe sale, poudreuse, sans eau, difficilement abordable par les navires, séparée de l'Égypte par le désert. Aujourd'hui, c'est une ville d'un aspect passable où s'effectue un mouvement de transit énorme, où s'élèvent plusieurs maisons européennes, deux hôtels confortables, l'un anglais, l'autre français, des cafés, un théâtre, etc. Un canal, bien connu sous le nom de *Canal d'eau douce*, y amène l'eau du Nil en abondance; un chemin de fer l'unit au Caire et à Alexandrie. Les lagunes qui formaient

(*) Cette lettre, reproduite au *Moniteur* vers le milieu d'octobre, renfermait une Note de M. Rayet. Ce second document, inséré aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, est la première pièce rendue publique où la nature des protubérances soit décrite exactement avec détails. C'est d'après lui que M. Lockyer fut conduit à reprendre son ancienne expérience et à montrer que les protubérances peuvent être étudiées en tout temps.

le fond du golfe ont été draguées, d'immenses digues, destinées à protéger l'entrée du canal maritime contre l'envasement, s'avancent fort loin en pleine mer; la rade a été creusée et se trouve actuellement garnie de nombreux paquebots et navires de toute espèce; un bassin de radoub a été construit par les Messageries pour le compte du vice-roi; les Compagnies de paquebots et l'entreprise du Canal entretiennent des chantiers en pleine activité : Suez est devenue une position d'une haute importance qui augmente de jour en jour.

A peine étions-nous débarqués, que M. Rousseau, ami particulier de M. Chabirand et ingénieur de la section de Suez, nous fit offrir son canot à vapeur pour visiter la rade et l'entrée du Canal.

Les gigantesques travaux de Suez provoquent surtout l'étonnement, si l'on songe aux conditions initiales dans lesquelles on les entreprit. Ainsi que nous l'avons dit, l'eau faisait complètement défaut dans le pays. Il fallait l'y apporter du Nil, dans des outres, à dos de chameau; plus tard, l'établissement de la voie ferrée permit de substituer à ce mode d'approvisionnement un système de wagons-citernes, qui a fonctionné jusqu'à l'ouverture du canal d'eau douce.

Celui-ci s'embranche sur le Nil un peu au-dessous du Caire et se dirige perpendiculairement au tracé du Canal maritime jusqu'à la nouvelle ville d'Ismaïlia, située à peu près au milieu de l'Isthme. De là, il longe le Canal maritime et vient déboucher à Suez par un système d'écluses.

La création de ce cours d'eau est l'une des idées les plus fécondes de M. de Lesseps; non-seulement il a permis de compléter la navigation à travers l'Isthme, longtemps avant l'achèvement du Canal maritime, au moyen d'un service de touage établi entre Suez et Ismaïlia; non-seulement il a facilité le transport d'un point à l'autre des immenses machines de toutes sortes qui sont distribuées entre les deux mers; non-seulement il a fourni de l'eau aux deux milliers de travailleurs répandus sur la même étendue; mais son action fécondante est destinée à transformer la physionomie de l'Isthme; les résultats déjà obtenus permettent de prévoir que, dans un avenir prochain, là où se trouvait le sable brûlant, vont naître des plantations variées, et qu'à l'aridité la plus complète vont succéder l'abondance et la fertilité.

Après avoir admiré les travaux et la rade, nous nous engageons dans

le Canal. Cette partie, où pénétrait déjà la mer Rouge, n'a été creusée à ciel ouvert que jusqu'à une faible profondeur; dès qu'on a pu y introduire une mince couche d'eau, on y a établi les fameuses dragues dont le travail, pour un sol convenable, est à la fois plus rapide et plus sûr que celui des hommes. Certaines d'entre elles enlèvent individuellement jusqu'à 1000 mètres cubes par jour. Les unes déversent les matières extraites dans des chalans qui vont les porter en pleine mer; d'autres dans de longs conduits de 60 mètres, qui les amènent directement sur les bords, de manière à construire les berges du même coup; d'autres dans des auges qui s'élèvent ensuite sur des rails inclinés.

Après avoir laissé le canot à vapeur et franchi un petit espace de terre, qui sépare la section de Suez de la suivante, nous prenions un nouveau canot qui nous conduisait jusque chez M. l'ingénieur Guillaumet. Dans cette partie du Canal le travail s'effectuait comme dans la précédente; mais elle présentait cette particularité que l'eau introduite pour établir les dragues a été empruntée au canal d'eau douce. On se disposait d'ailleurs à la vider, pour extraire directement une couche de rognons pierreux, qui se prêtaient mal au fonctionnement des dragues.

Nous trouvâmes chez M. Guillaumet l'hospitalité la plus cordiale. Le lendemain matin nous étions attendus, grâce à lui, par des chevaux tout préparés et nous partions à sa suite dans la direction de Chalouf, où nous déjeunions chez M. l'ingénieur. A partir de ce point, sur une longueur considérable, on creuse à ciel ouvert. Des milliers de travailleurs arabes et européens répandus dans la tranchée donnent aux talus, vus de loin, l'aspect d'une fourmilière; partout règne une activité merveilleuse. Plusieurs systèmes sont mis en œuvre pour l'extraction des déblais: l'un consiste dans l'emploi de longs plans inclinés avec deux systèmes de rails, sur l'un desquels monte un convoi de wagons chargés et attirés par un treuil à vapeur, tandis que sur l'autre descend un convoi de wagons vides. Mais le transport direct est préféré partout où il est possible. Nous signalerons un détail: l'une des principales difficultés de l'entreprise a été d'habituer les Arabes au manie-
ment de la brouette au lieu de ce petit panier à deux anses, nommé *caufin*, qui est en usage jusqu'en Provence. Cette remarque peut paraître puérile; mais rien n'est à négliger dans une telle entreprise, où l'amélioration la plus minime en apparence se traduit au bout de

chaque journée, par des milliers de mètres cubes enlevés. Dans cette course, nous poussions jusqu'aux abords des lacs Amers.

On donne ce nom à une immense dépression de terrain, actuellement à sec, et qui se trouve comprise dans le tracé. L'étendue en est si considérable, qu'on n'évaluait pas à moins de trois mois le temps nécessaire au remplissage; ce sera comme une petite mer intérieure. Le nom d'*Amers* est dû à une épaisse couche de sel marin qui recouvre le sol.

Le soir, coupant en biais à travers le désert, nous revenions à Chalouf, et de là par le canal d'eau douce jusqu'à Suez.

Dès le lendemain, nous laissions définitivement Suez pour Ismaïlia.

La première voie ferrée établie allait directement de Suez au Caire et de là à Alexandrie. Dans l'intervalle de notre voyage en Cochinchine, une nouvelle ligne plus directe venait d'être inaugurée. Celle-ci va presque en droite ligne de Suez à Alexandrie, passe tout près d'Ismaïlia, à une petite station nommée Né-Fich et n'est reliée au Caire que par un embranchement.

Ismaïlia, qui est le point central de l'Isthme et peut être considérée comme le quartier général de la Compagnie et de l'entreprise, semble avoir été créée d'un coup de baguette magique. Là où n'existait que le désert absolument nu, s'élève aujourd'hui une petite ville charmante d'une dizaine de milliers d'âmes. Une ancienne vallée sablonneuse, maintenant remplie par les eaux de la Méditerranée, est devenue un joli lac, dont les flots bleus viennent baigner le pied des dernières maisons; tout autour règne une ceinture de collines qui, malgré leur aridité, se détachent sur le ciel de la façon la plus harmonieuse.

La ville, où règne une grande animation, se compose de trois parties bien distinctes : l'une entièrement française, une seconde grecque et une troisième arabe.

La portion française, qui est aussi la principale, occupe le centre. Elle est groupée autour d'une belle esplanade carrée, plantée en square et appelée la place Champollion. Vers ce point viennent converger des rues bordées de maisons bien construites, parmi lesquelles se distinguent les délicieuses résidences du pacha, de M. de Lesseps et des principaux agents de la Compagnie. Toutes ces habitations, abondamment pourvues d'eau douce, ont des jardins frais et fleuris, où se mêlent les plantes d'Europe et celles d'Afrique.

La partie grecque est surtout réservée aux ouvriers; quant à la partie arabe, c'est plutôt un camp qu'une ville proprement dite.

Une des principales curiosités d'Ismailia est l'usine Lasseron, qui envoie à Port-Saïd les eaux du canal d'eau douce, par un système de conduits souterrains. Tout autour de l'usine s'étend un vaste jardin où croissent, avec nos fruits et nos légumes, la canne à sucre, le coton, le dattier, etc. Mais ce qui fait l'orgueil du propriétaire, c'est un plan de vignes en plein rapport, qui, en 1868, a fourni deux barriques d'un vin dont le goût n'est pas sans analogie avec celui du vin des bords du Rhin.

L'eau de la Méditerranée, qui, à l'époque dont nous parlons, remplissait déjà depuis fort longtemps toute la portion comprise entre Port-Saïd et le lac Timsha, s'étendait au delà du lac, dans la direction des lacs Amers, jusqu'au seuil du Sérapeum. On appelle ainsi un plateau qui doit être coupé par le Canal et qui se trouve notablement plus élevé que le niveau moyen de l'Isthme. Le seuil du Sérapeum offrait une des particularités les plus curieuses de tout le parcours : profitant de ce que le niveau du canal d'eau douce, au point voisin, dépasse de 7 mètres environ celui des deux mers, on a pu amener une couche d'eau sur le plateau du Sérapeum et là installer les dragues; il en résulte que quand on arrive d'Ismailia en bateau, on vient buter contre un talus au-dessus duquel on aperçoit des mâts, des dragues, des tuyaux de machines à vapeur, comme suspendus en l'air à la hauteur d'un premier étage. Cette excursion nous prit un jour.

Le lendemain matin, grâce à l'obligeance de MM. Ritt et Pouchet, qui voulurent bien mettre à notre disposition un charmant bateau à vapeur de la Compagnie et dont le dernier poussa la gracieuseté jusqu'à nous accompagner, nous partions pour Port-Saïd, où nous arrivions à 4 heures du soir.

A une dizaine de kilomètres d'Ismailia, on franchit le seuil d'El-Gishr, dont le percement a été effectué comme celui du Sérapeum. C'est dans cette partie seule du Canal qu'on peut redouter l'inconvénient dont on a fait, au début, une objection soi-disant capitale contre la possibilité du percement de l'Isthme; là existent en effet des sables mouvants qui, transportés par les vents, peuvent venir encombrer le chenal; mais, outre que ce danger a été singulièrement exagéré, il

suffira pour l'annuler d'un curage régulièrement organisé, comme cela se pratique pour tous nos ports d'Europe; d'ailleurs tout fait supposer qu'on pourra fertiliser cette portion du désert à l'aide du canal d'eau douce et en fixer le sol. Jusqu'à Port-Saïd, le Canal est rectiligne et se trouvait alors presque terminé; il ne restait plus qu'à donner au chenal, en certains points, la profondeur et la largeur convenues. Pour cela, de nombreuses dragues à long couloir, échelonnées sur tout le parcours, creusaient avec la plus grande activité. C'était un curieux spectacle en vérité que cette longue perspective fumeuse de tuyaux de machines à vapeur, d'engrenages, d'appareils mécaniques de toute nature se succédant sans interruption sur une longueur de quinze lieues. On eût dit une rivière, menant à une ville manufacturière, apparaissant elle-même dans le lointain.

Port-Saïd, qui n'existait pas il y a dix ans, est aujourd'hui un port très-fréquenté où viennent toucher deux lignes de paquebots français, une ligne autrichienne et une italienne. Des digues analogues à celles de Suez et presque terminées forment une rade et protègent l'entrée du Canal contre l'envahissement des vases et des sables venus du large; des bassins profonds creusés à l'intérieur offrent aux navires une position complètement sûre. On trouve à Port-Saïd des ateliers de construction et de réparation en pleine activité; en un mot, tout ce qui constitue une place maritime sérieuse. Un phare est placé à l'entrée.

La ville, d'un aspect moins riant que celui d'Ismailia, possède une population un peu plus nombreuse; elle est évidemment destinée à acquérir une grande importance.

Certains voyageurs arrivant à Port-Saïd font cette réflexion que la Compagnie a été bien heureuse de trouver un port semblable pour y établir la tête du Canal: or, il n'y avait là qu'une côte parfaitement rectiligne; tout a été créé, tout est l'œuvre de l'industrie et non de la nature.

Pleins d'admiration pour cette grande œuvre française de l'Isthme de Suez, nous revenions à Ismailia pendant la nuit et en repartions le 4 au matin pour le Caire.

Nous ne donnerons que quelques notes rapides sur cette vaste capitale, qui demanderait une longue étude, car elle est la ville la plus curieuse de tout l'Orient, y compris Constantinople; mais pour la bien

connaître et décrire exactement tout ce qu'elle renferme d'intéressant, il faudrait y avoir séjourné des années entières.

Le Caire renferme un certain nombre d'Européens, mais ils sont en infime minorité; c'est bien l'Égypte pure avec toute sa couleur locale : Arabes drapés dans leurs grands burnous; fellahs vêtus de haillons; Égyptiens du peuple avec la grande robe légère et le turban; élégants portant le large pantalon de drap noir, la redingote sans revers et le fez; femmes de toutes conditions allant par la ville à pied ou en voiture, la figure masquée par cette pièce d'étoffe noire qui n'en laisse paraître que les yeux : tout l'Orient est là et constitue un ensemble bariolé caractéristique.

La partie centrale de la ville est coupée par une grande artère principale appelée *le Manski*; cette rue, recouverte dans presque toute sa longueur par des solives garnies de nattes, est sombre, non pavée, sans trottoirs, mais spacieuse; elle est bordée de hautes maisons où s'entremêlent les magasins à l'européenne et les boutiques égyptiennes. Une circulation, qui n'est comparable qu'à celle des boulevards de Paris, y entasse piétons, équipages, chevaux, ânes, chameaux, dans une confusion inextricable; mais malgré ce désordre extrême, tout cela trouve moyen de passer sans trop d'accidents. Le Manski mène aux deux grands bazars égyptien et turc, où sont concentrés tous les produits orientaux, depuis les objets de luxe du plus grand prix, jusqu'aux articles les plus vulgaires.

Le reste de la ville est un labyrinthe de rues étroites, tortueuses, où la lumière, arrêtée par les toits en surplomb, n'arrive qu'avec peine; toutes les fenêtres sont garnies de treillis en bois formant saillie à l'extérieur et servant de balcons, où se placent les femmes pour prendre le frais et voir les passants. Cette disposition donne à la ville un cachet mystérieux plein de tristesse, si l'on prend une ville d'Europe pour terme de comparaison; mais il n'y a aucun rapprochement à faire. On s'habitue vite à cet aspect et l'on ne conçoit plus un autre arrangement. Que l'on donne de la largeur aux rues, que l'on dégage les mosquées et les palais, que l'on pave les rues et pose des trottoirs, le Caire aura cessé d'exister comme ville arabe.

Une partie a déjà perdu toute originalité, c'est le quartier européen. Au centre, se trouve une place magnifique plantée d'arbres, l'Esbéikié,

et tout autour des maisons européennes. Depuis quelques mois, on dispose cette esplanade en manière de square, on garnit le pourtour d'asphalte, on vient de l'éclairer au gaz; c'est fort joli, mais c'est l'Europe et non l'Égypte.

Cependant, lors de notre premier passage, nous y fûmes témoins d'un spectacle bien curieux. C'était la fête du Prophète : de tous les points de l'Égypte, les croyants se rendent au Caire en pèlerinage pour cette solennité, et l'Esbéikié est couvert de leurs tentes; le soir, toutes ces tentes sont illuminées; sous chacune d'elles, les derviches se placent en rond, assis ou debout, et récitent des prières à haute voix, sur un rythme cadencé et monotone comme des litanies, tandis que le prêtre marque une sorte de mesure; en même temps tout le corps se balance avec un soubresaut convulsif toujours le même; on donne à ces fidèles le nom de *derviches hurleurs*; ils continuent ainsi des nuits entières jusqu'à ce qu'épuisés, ils tombent dans une sorte de catalepsie extatique. Rien ne saurait rendre exactement l'effet produit à distance par ces clameurs entremêlées; c'est quelque chose comme le bruit de la mer qu'on entendrait briser dans la nuit.

Le nombre des palais est considérable; l'un des plus remarquables occupe une île du fleuve dans une situation merveilleuse. Pourquoi faut-il que ces constructions, d'une architecture gracieuse et originale, soient inachevées et mal entretenues. De loin l'effet produit est admirable; de près le marbre supposé devient un grossier plâtras effondré et crevassé de lézardes. Comme tout ce qui tient au gouvernement égyptien, c'est un trompe-l'œil.

On doit cependant faire une exception en faveur du jardin de Choubra, où réside un oncle du vice-roi. On s'y rend par une avenue de 2 kilomètres, ombragée de magnifiques platanes et bordée par de somptueuses villas européennes. Le jardin, facilement accessible au public, est vaste, ombré, plein de fleurs. Au milieu se trouve une grande pièce d'eau entourée d'une colonnade en marbre blanc, qui relie de petits salons décorés avec assez de goût. C'est là que le harem vient prendre ses ébats.

L'une des choses les plus curieuses du Caire, sinon la plus curieuse, est le Musée de Boulac, où M. Mariette-Bey, le savant archéologue, a réuni toutes les antiquités égyptiennes, dont il a découvert lui-même

la plus grande partie. Les principales pièces de cette collection ont figuré à l'Exposition de 1867. Nous tenions beaucoup à voir notre compatriote avant d'entreprendre l'excursion des Pyramides. M. Mariette nous accueillit avec la plus parfaite courtoisie et voulut bien nous donner sur ces monuments, qu'il connaît mieux que personne, de nombreux renseignements du plus haut intérêt. Entre autres points, s'attachant à celui qui devait nous toucher de plus près, il se livra devant nous à une réfutation complète des idées de l'astronome anglais M. Piazzi-Schmidt, qui, comme on sait, attribue aux Pyramides une destination scientifique. Sans reproduire toute l'argumentation de M. Mariette, nous la résumons ainsi : *Les Pyramides sont des tombeaux, cela est hors de doute; or les idées religieuses des anciens Égyptiens s'opposant d'une manière formelle à la violation des sépultures, il est impossible qu'on ait enfermé dans ces monuments des objets destinés à voir le jour plus tard.* Nous nous garderons bien de formuler un avis personnel sur une pareille question.

Le 7 octobre, à 3 heures du matin, nous partions pour les Pyramides, afin d'assister de leur sommet au lever du Soleil. La course est de 16 kilomètres environ; on la fait sur des ânes. Du reste on n'a point à s'occuper des détails du voyage; moyennant un prix convenu d'avance, le drogman se charge de tout.

En une demi-heure, on atteint les bords du Nil; là, on trouve des barques où l'on entre bêtes et gens et, après une traversée d'un quart d'heure environ, elles vous déposent sur l'autre rive au village de Ghisé. A partir de là, on suit une belle chaussée en ligne droite, que le vice-roi a fait construire pour recevoir l'Impératrice des Français et qui mènera jusqu'au pied des Pyramides, quand un dernier pont sera construit. L'inondation n'étant pas terminée, nous dûmes nous arrêter en ce point à un demi-kilomètre environ des monuments et attendre que les Arabes vinssent nous chercher en bateau. Dès lors, on ne s'appartient plus, on devient la chose des Arabes. Une tribu, qui ne vit que par les voyageurs, en a obtenu du vice-roi le monopole; il faut à toute force passer par leurs mains moyennant une redevance toutefois, cela bien entendu sans préjudice de nombreux pourboires. En revanche, les Arabes deviennent responsables de leurs voyageurs, et je ne crois pas qu'il y ait des exemples d'accidents graves survenus par leur faute.

Je craignais une déception, il n'en fut rien : comme à Saint-Pierre-de-Rome, l'impression du grandiose n'est pas immédiate ; il faut avoir contemplé quelques instants ces masses énormes, s'être déplacé, avoir envisagé les objets environnants pour se rendre compte de leurs dimensions colossales ; mais quand, après ce premier examen, on vient se placer à côté du Sphinx, à une certaine distance, de manière que celui-ci se projette sur les Pyramides, qu'on examine les hommes qui entourent son énorme tête, puis qu'on reporte les yeux sur l'ensemble des ruines, on reste confondu d'admiration.

Le groupe des Pyramides de Ghisé en comprend sept, dont trois principales ; l'une de ces dernières, celle de Chéops, est considérablement plus élevée que toutes les autres : c'est sur celle-ci que l'on monte.

L'ascension est extrêmement pénible : les assises de pierre, qui forment comme un escalier gigantesque, ont à peu près 80 centimètres de hauteur ; après en avoir gravi un certain nombre, on est épuisé. Il arrive quelquefois que des voyageurs, parvenus au milieu de la route, perdent brusquement connaissance. Les Arabes, qui connaissent cet effet, font tous leurs efforts pour l'amener, dans l'espoir que leurs soins empressés seront récompensés d'un meilleur batchich ; et, pour cela, ils surmènent leurs victimes, ce qui leur est facile, car chacun met une sorte de point d'honneur à arriver vite. Ainsi tiré par les mains, poussé par derrière, on atteint le faite hors d'haleine.

Le sommet n'est pas terminé par une pointe aiguë, mais par une plate-forme de 15 à 16 mètres carrés. Cette largeur et celle des marches annulent à peu près tout vertige.

Comme nous arrivions à ce point, le Soleil se levait à l'horizon malheureusement chargé de vapeurs ; néanmoins, c'était un beau spectacle. Les Pyramides sont situées à la limite même du désert. À l'ouest est la vallée du Nil, à l'est le sable à perte de vue. Aux premières lueurs de l'aube, le contraste est frappant : tandis que s'éclairent successivement le Nil, les arbres qui en bordent les rives, les minarets du Caire dans le lointain, le désert reste encore comme tendu de noir avec l'aspect d'une mer immobile ; puis peu à peu les formes des objets devenant moins indécises, les contours du Sphinx se dessinent, les Pyramides apparaissent à l'horizon, le désert prend une teinte jaune sombre sur laquelle s'étendent les grandes ombres des Pyramides de Ghisé,

C'est une impression saisissante et multiple qu'il faut renoncer à analyser.

En descendant, on s'arrête à mi-hauteur pour visiter l'intérieur du monument. On s'engage d'abord dans un couloir très-incliné, où il faut glisser courbé en deux; arrivé en bas, on tourne à droite pendant quelques pas, puis on gravit un nouveau couloir non moins incliné que le premier, mais en sens inverse, et l'on parvient à la Chambre dite *du roi*, où se trouve la fameuse cuve de porphyre, dont M. Piazz-Schmidt a trouvé la contenance en rapport direct avec le gallon anglais. La pièce est cubique et recouverte d'inscriptions hiéroglyphiques. Au-dessous de celle-ci, s'en trouve une autre dite *Chambre de la reine*, qui est complètement vide.

Il faudrait un long séjour aux Pyramides pour visiter toutes les curiosités qui les environnent. Ici, du côté du Sphinx, est une vaste excavation où se trouve mise à nu toute une colossale colonnade de porphyre rouge; ce sont les ruines d'un temple que M. Mariette-Bey découvrit en cherchant un passage souterrain entre le Sphinx et la grande Pyramide; plus loin, une fouille profonde a fourni un grand nombre de sarcophages, dont plusieurs sont encore en place et apparaissent à moitié engagés dans le sable. Il est évident que cette partie de la contrée était affectée aux sépultures.

Le lendemain de notre excursion aux Pyramides, nous partions pour Alexandrie.

Cette ville n'offre que peu de choses curieuses. Elle est belle, animée, mais c'est déjà l'Europe : les costumes y sont européens, les enseignes et les noms des rues en français, on se croirait à Marseille. Après qu'on a vu la colonne de Pompéi et l'aiguille de Cléopâtre, on en connaît toute la partie antique. Nous pouvions déjà considérer notre voyage comme accompli.

Laissant l'Égypte le 9 octobre, avec le *Nil* des Messageries impériales, nous étions de retour à Marseille le 15 à minuit.

PLANCHE I. — Vues de l'éclipse de Soleil d'après les croquis de MM. Olry et Bordes, et les mesures de M. Stephan.

PLANCHE II. — Dessins originaux de MM. Ory et Bordes.

SUR LES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DU SECOND ORDRE,

PAR M. G. DARBOUX,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE, PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES
AU LYCÉE LOUIS-LE-GRAND.

I.

Dans l'état actuel de la science, on connaît peu de chose sur les équations aux dérivées partielles du second ordre. A part une remarque très-ingénieuse de Bour (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXIX^e Cahier, p. 186-189), rien d'essentiel n'a été ajouté à la théorie importante exposée d'une manière si lumineuse par Ampère dans les Cahiers XVII et XVIII du *Journal de l'École Polytechnique*. Je me propose, dans cette Note, d'exposer les principes seulement d'une nouvelle méthode qui, sans donner la solution complète du problème, me paraît constituer un progrès dans la théorie des équations aux dérivées partielles. Cette méthode s'étend aux équations *de tous les ordres, à un nombre quelconque de variables*, et même *aux équations simultanées*; mais, pour obtenir plus de netteté dans ce rapide exposé, je ne parlerai que des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes.

Soit

$$(1) \quad f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

l'équation proposée, et soit

$$(2) \quad Xdx + Ydy + Zdz + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + Tdt = 0$$

sa différentielle totale; adoptons, pour résoudre la question, la méthode du changement de variables employée avec tant de succès par Ampère et par Cauchy. Pour cela, nous remplacerons x et y par les variables indépendantes x, y_0 , y_0 étant une fonction de x et de y qu'on pourra déterminer comme on le jugera convenable.

Nous aurons d'abord les relations suivantes, qui sont bien connues :

$$(3) \quad \frac{\partial z}{\partial y_0} = q \frac{\partial y}{\partial y_0}, \quad \frac{\partial p}{\partial y_0} = s \frac{\partial y}{\partial y_0}, \quad \frac{\partial q}{\partial y_0} = t \frac{\partial y}{\partial y_0},$$

$$(4) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = p + q \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = r + s \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = s + t \frac{\partial y}{\partial x}.$$

De plus, les conditions d'intégrabilité prendront la forme

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial y_0} = \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial q}{\partial y_0} \frac{\partial y}{\partial x}, \\ \frac{\partial r}{\partial y_0} = \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial s}{\partial y_0} \frac{\partial y}{\partial x}, \\ \frac{\partial s}{\partial y_0} = \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial t}{\partial y_0} \frac{\partial y}{\partial x}. \end{cases}$$

A ces équations il faut joindre la suivante, obtenue en prenant la dérivée de l'équation (1) par rapport à y_0 :

$$Y \frac{\partial y}{\partial y_0} + Z \frac{\partial z}{\partial y_0} + P \frac{\partial p}{\partial y_0} + Q \frac{\partial q}{\partial y_0} + R \frac{\partial r}{\partial y_0} + S \frac{\partial s}{\partial y_0} + T \frac{\partial t}{\partial y_0} = 0.$$

Servons-nous maintenant des équations (3), (4), (5) pour éliminer de l'équation précédente toutes les dérivées par rapport à y_0 , excepté $\frac{\partial y}{\partial y_0}$ et $\frac{\partial t}{\partial y_0}$; nous obtiendrons la nouvelle équation

$$(a) \quad \begin{cases} \left(Y + Zq + Ps + Qt + R \frac{\partial s}{\partial x} + S \frac{\partial t}{\partial x} - R \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial y_0} \\ + \left[S \frac{\partial y}{\partial x} - R \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 - T \right] \frac{\partial t}{\partial y_0} = 0. \end{cases}$$

Or on peut supposer, d'après des principes qu'il est inutile de rap-

peler ici, que y_0 a été choisi de manière que l'équation suivante

$$(6) \quad R \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 - S \frac{\partial y}{\partial x} + T = 0$$

soit satisfaite.

L'équation (a) se réduit alors et devient

$$Y + Zq + Ps + Qt + R \frac{\partial s}{\partial x} + S \frac{\partial t}{\partial x} - R \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

ce qu'on peut encore écrire, en tenant compte de l'équation (6),

$$(7) \quad Y + Zq + Ps + Qt + R \frac{\partial s}{\partial x} + T \frac{\frac{\partial t}{\partial x}}{\frac{\partial y}{\partial x}} = 0.$$

Nous avons donc, en résumé, à déterminer les sept inconnues y, z, p, q, r, s, t fonctions de x et de y_0 , et satisfaisant aux équations (1), (3), (4), (6), (7). On peut même remplacer l'équation proposée par sa dérivée, prise par rapport à x , qui, en tenant compte de l'équation (7), prend la forme simple

$$(8) \quad X + Zp + Pr + Qs + R \frac{\partial r}{\partial x} + S \frac{\partial s}{\partial x} = 0.$$

Or parmi les équations (3), (4), (6), (7), (8), *six* ne contiennent pas la variable y_0 ; mais, comme il y a *sept* inconnues, le changement de variables n'a plus ici la même utilité que dans le cas du premier ordre; il ne peut donner la solution complète du problème.

II.

La méthode précédente est susceptible d'une grande simplification dans le cas très-important où l'équation proposée est de la forme

$$(9) \quad Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

où H, K, L, M, N sont des fonctions quelconques de x, y, z, p, q .

On peut ici se servir des équations

$$\frac{\partial p}{\partial x} = r + s \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = s + t \frac{\partial \gamma}{\partial x}.$$

Si l'on déduit de ces deux équations r, s en fonction de t , et qu'on substitue leurs valeurs dans l'équation proposée (9), il arrive, *par suite de la forme particulière de cette équation*, que le coefficient de t s'annule, t disparaît du résultat. On est ainsi conduit au système suivant :

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial x} = m, \\ Hm^2 - 2Km + L + N \left(\frac{\partial p}{\partial x} + m \frac{\partial q}{\partial x} \right) = 0, \\ H \left(\frac{\partial p}{\partial x} - m \frac{\partial q}{\partial x} \right) + 2K \frac{\partial q}{\partial x} + M - N \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 = 0, \\ dz = p dx + q d\gamma, \end{cases}$$

qui ne contient plus les dérivées du second ordre r, s, t , mais seulement z, y, p, q et leurs dérivées par rapport à x . Ce sont les équations de Monge, auxquelles il faudrait joindre les suivantes pour la détermination complète de y, z, p, q :

$$(11) \quad \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial \gamma}{\partial y_0} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial y_0} = \frac{\partial p}{\partial y_0}, \quad \frac{\partial z}{\partial y_0} = q \frac{\partial \gamma}{\partial y_0}.$$

On voit que, dans le cas que nous venons d'examiner, et qui a été jusqu'ici presque le seul considéré par les géomètres, la forme particulière de l'équation permet d'éliminer du système des équations aux dérivées ordinaires considérées plus haut les trois dérivées r, s, t . Hâtons-nous de dire qu'une pareille simplification ne constitue que rarement un avantage, et que des simplifications analogues se présentent dans tous les ordres, quand les équations aux dérivées partielles ont une forme convenablement choisie.

III.

On a vu, dans les deux paragraphes précédents, que le problème des équations d'ordre supérieur se sépare très-nettement du problème relatif aux équations du premier ordre. Pour le premier ordre, en effet,

la méthode du changement de variables ramène la question à l'intégration d'un système *complet* d'équations aux dérivées ordinaires. Pour le second ordre et pour les ordres supérieurs, il y a au contraire moins d'équations que d'inconnues à déterminer. Les remarques qui suivent paraissent accuser aussi une différence profonde entre les deux problèmes.

Puisque, dans le cas où l'on se borne aux inconnues y, z, p, q, r, s, t , on a une équation de moins qu'il ne faudrait pour la solution cherchée du problème, il est naturel de se demander si, en adjoignant aux inconnues précédentes les quatre dérivées partielles du troisième ordre, que nous appellerons $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, on ne parviendrait pas à un nombre d'équations suffisant pour déterminer comme fonctions de x , non-seulement les inconnues primitives, mais aussi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Il se présente ici un fait important, et qui, je crois, n'a pas été remarqué. *Le nombre des équations ne contenant pas y , est encore inférieur d'une unité au nombre des fonctions inconnues.* Ces équations ne suffisent donc pas à déterminer les inconnues considérées comme fonctions de la seule variable x ; mais la différence entre le nombre des équations et celui des inconnues reste la même qu'auparavant : elle est égale à l'unité. Il en est de même si, au lieu de s'arrêter au troisième ordre, on continue les calculs jusqu'à un ordre quelconque : *il y a toujours une équation de moins qu'il n'y a d'inconnues.*

Les résultats précédents établissent, on le voit, une différence essentielle entre les équations aux dérivées partielles du premier ordre et celles des ordres supérieurs. Pour les équations du premier ordre, le nombre des équations contenant seulement les dérivées par rapport à x est toujours égal au nombre des fonctions inconnues. Il n'en est plus de même pour les équations d'ordre supérieur. Pour l'équation de Monge, par exemple, considérée dans le § II, on n'a que trois relations pour déterminer z, p, q, y considérées comme fonctions de x . On sait tout le parti qu'on tire d'ailleurs de ces relations différentielles : toutes les fois qu'elles offrent deux combinaisons intégrables, on peut résoudre l'équation différentielle, ou du moins la ramener à une équation du premier ordre.

Les remarques que nous avons faites indiquent de même, pour les équations du second ordre, la méthode suivante :

On essayera de trouver, en dehors de l'équation proposée, deux combinaisons intégrables des équations en y, z, p, q, r, s, t . Si ces combinaisons existent dans les deux systèmes qu'on obtient en prenant successivement pour $\frac{\partial y}{\partial x}$ les deux racines de l'équation du second degré qui détermine cette dérivée, le problème pourra être considéré comme entièrement résolu; si l'on n'a pas de combinaison intégrable, on aura recours aux équations qui contiennent ces dérivées du troisième ordre. *Alors même que les premières équations ne fourniraient pas de combinaison susceptible d'intégration, le second système formé avec les dérivées prises jusqu'au troisième ordre pourra en donner. Si ce système n'est pas susceptible d'intégration partielle, on ira jusqu'aux dérivées du quatrième ordre, et l'on pourra avoir des combinaisons intégrables, et ainsi de suite.*

IV.

La remarque énoncée à la fin du paragraphe précédent me paraît conduire à une méthode plus générale que celles qui sont habituellement employées. On peut, du reste, présenter cette méthode sous un autre point de vue qui permet d'obtenir plus facilement les systèmes successifs qu'on aura à employer partiellement.

Supposons que l'un quelconque de nos systèmes conduise à deux combinaisons intégrables

$$F(x, y, z, p, q, \dots) = \text{const.}, \quad F_1(x, y, z, p, q, \dots) = \text{const.}$$

Les deux constantes qui figurent dans ces équations *doivent être considérées comme des fonctions inconnues de y_0* . Éliminant y_0 , on est conduit à une équation de la forme

$$F = \text{fonction arbitraire de } F_1.$$

Cette dernière relation peut être évidemment considérée comme une nouvelle équation différentielle compatible avec la proposée, et qui admet en commun avec elle une intégrale *avec une fonction arbitraire*. Nous sommes donc conduits à la solution de la question suivante, qui répond à ce deuxième mode d'exposition :

Trouver une équation différentielle

$$V = a$$

du $n^{\text{ième}}$ ordre, admettant, en commun avec la proposée, une solution contenant au moins une fonction arbitraire.

Pour cela, il suffit de remarquer que la proposée, différenciée $n - 1$ fois, donne n équations contenant les dérivées d'ordre $n + 1$, au nombre de $n + 2$. L'équation $V = a$, différenciée successivement par rapport à x et à y , donne deux équations contenant, elles aussi, les dérivées d'ordre $n + 1$. On a donc en tout $n + 2$ équations contenant linéairement les dérivées d'ordre $n + 1$, et qui déterminent ces $n + 2$ dérivées en fonction des dérivées d'ordre inférieur, si les deux équations différentielles dont on cherche la solution commune sont prises arbitrairement. Mais ici cela ne doit pas être; sans cela les dérivées d'ordre supérieur à $n + 1$ se détermineraient toutes, comme les dérivées d'ordre $n + 1$, en fonction des dérivées d'ordre moindre; puisqu'une fois obtenues toutes les dérivées d'ordre $n + 1$ en fonction des dérivées d'ordre inférieur, on n'aurait qu'à dériver toutes les équations qui donneraient chacune de ces dérivées pour avoir les dérivées d'ordre supérieur, et la solution commune, si elle existait, ne pourrait contenir tout au plus *qu'un nombre limité de constantes arbitraires*. Il faut donc que ces $n + 2$ équations contenant linéairement les $n + 2$ dérivées d'ordre $n + 1$ forment un système indéterminé, ce qui donne deux équations de condition. Comme deux des équations contiennent les dérivées de V , $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$, $\frac{\partial V}{\partial p}$, $\frac{\partial V}{\partial q}$, ..., les relations de condition doivent être considérées comme deux équations aux dérivées partielles du premier ordre auxquelles doit satisfaire la fonction V . Ces équations sont homogènes et du second degré par rapport aux dérivées.

Ce qui précède explique et généralise la remarque par laquelle Bour a établi qu'on peut toujours reconnaître si l'application des méthodes de Monge et d'Ampère pourra réussir. Bour n'avait examiné que le premier cas, celui où l'on suppose que l'équation du premier ordre a une intégrale intermédiaire.

V.

Les deux méthodes que nous venons d'indiquer se retrouvent d'ailleurs dans la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. La première, fondée sur le changement de variables, est due, comme on sait, à l'illustre Cauchy, qui l'a donnée en 1819. La seconde a été introduite dans la science et développée par Jacobi. C'est en essayant d'établir un lien entre ces deux méthodes que j'ai été amené à l'étude dont les résultats principaux ont été rapidement indiqués ici.

La seconde méthode permet de se rendre compte simplement du nombre des intégrations qui sont nécessaires pour la solution complète du problème; mais il est indispensable qu'avant de traiter ce point, nous entrions dans quelques explications.

Soit une équation différentielle d'ordre n

$$F\left(\frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y}, \dots\right) = 0.$$

Désignons par R_n, R_{n-1}, \dots les dérivées du premier membre de l'équation prises par rapport aux dérivées d'ordre $n, \frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y}, \dots$. Nous appellerons *équation caractéristique* de l'équation différentielle l'équation suivante à une inconnue u :

$$R_n u^n + R_{n-1} u^{n-1} + \dots = 0.$$

Par exemple, pour l'équation différentielle (1), considérée au commencement, cette équation caractéristique serait

$$R u^2 + S u + T = 0.$$

Cette définition une fois comprise, il est facile de compléter un résultat énoncé plus haut.

Pour que l'équation proposée

$$f(x, y, z, p, q, \dots) = 0$$

et l'équation différentielle $V = a$ aient une solution commune avec une

fonction arbitraire, il faut d'abord que l'équation caractéristique de l'équation $V = a$ admette une des racines de l'équation

$$(12) \quad Ru^2 + Su + T = 0.$$

On voit donc que les équations différentielles $V = a$ que nous cherchons se divisent en deux classes, suivant qu'elles appartiennent à l'une ou à l'autre des racines de l'équation précédente. Pour la solution complète du problème, il suffit d'avoir une équation de chaque classe, contenant elle-même une fonction arbitraire. Un nombre quelconque d'équations différentielles appartenant à la même classe ne peut donner l'intégrale complète de notre équation. Il est, du reste, évident que si l'équation (12) est irréductible, si $S^2 - 4RT$ n'est pas carré parfait, il suffira de changer dans une intégrale le signe du radical pour en obtenir une nouvelle.

Ainsi, dans le cas où l'équation caractéristique est irréductible, il suffit, pour la solution complète du problème, que l'un des systèmes à intégrer fournisse deux combinaisons intégrables correspondant à la même racine de l'équation irréductible.

Si l'on n'a pas le nombre voulu de combinaisons intégrables, on n'aura évidemment que des solutions particulières.

Les méthodes précédentes réussiront toujours, il est facile de le démontrer, toutes les fois que les intégrales seront de celles qu'Ampère appelle *intégrales de première espèce*, et qui ne contiennent pas de signe d'intégration.

VI.

En terminant cet exposé sommaire, j'indiquerai quelques équations auxquelles j'ai appliqué la méthode précédente :

1° Il y a d'abord l'équation linéaire de Laplace : les différents cas d'intégrabilité indiqués par Laplace correspondent à nos systèmes successifs d'équations ;

2° L'équation simple

$$s = f(z).$$

En cherchant les cas les plus simples dans lesquels la méthode

réussit, on est conduit à l'équation suivante

$$s = e^{kz},$$

intégrée déjà par M. Liouville (*Journal de Mathématiques*, t. XVIII, p. 71). Cette équation se rencontre dans la théorie des surfaces applicables sur la sphère, et son intégrale peut être obtenue par des considérations géométriques.

3° Considérons l'équation différentielle donnée par Bour des surfaces applicables sur une surface donnée dans laquelle la distance des deux points infiniment voisins est donnée par la formule

$$ds^2 = 4\lambda dx dy.$$

Bour montre que les coordonnées rectangulaires d'un point de la surface cherchée satisferont à l'équation

$$2(pq - \lambda) \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial x \partial y} - s^2 + \left(r - p \frac{\partial \log \lambda}{\partial x}\right) \left(t - q \frac{\partial \log \lambda}{\partial y}\right) = 0.$$

Si nous cherchons les conditions les plus simples dans lesquelles la méthode indiquée puisse réussir, nous trouvons qu'en posant

$$a = \frac{\partial \log \lambda}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial \log \lambda}{\partial y}, \quad c = \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial x \partial y},$$

toutes les fois que λ satisfera à l'équation différentielle

$$\lambda^{\frac{3}{2}} c^{\frac{1}{2}} = \int \frac{\lambda^{\frac{3}{4}} c^{\frac{1}{4}}}{4} \left(a - \frac{\partial c}{c \partial x}\right) dy \int \frac{\lambda^{\frac{3}{4}} c^{\frac{1}{4}}}{4} \left(b - \frac{\partial c}{c \partial y}\right) dx,$$

on pourra trouver une série de surfaces applicables sur la proposée, et contenant dans leur expression une fonction arbitraire.

VII.

Les résultats qui précèdent ont été communiqués à l'Académie des Sciences le 28 mars 1870 (*); mais il est facile de déduire des remarques faites plus haut quelques notions nouvelles sur la méthode de

(*) *Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, t. LXX, p. 675 et 746.

la *variation des constantes*, à laquelle Bour attachait la plus grande importance.

Voici, pour le cas du second ordre, comment on devrait appliquer la méthode de Lagrange : il faudrait d'abord chercher une intégrale particulière contenant cinq constantes, et, remplaçant ensuite les constantes par des fonctions arbitraires, en disposer de manière que les expressions des dérivées jusqu'au second ordre restent toutes les mêmes. On est ainsi ramené à un système d'équations simultanées en général tout aussi difficile à intégrer que l'équation proposée, et par conséquent la méthode n'offre plus les mêmes avantages que pour le premier ordre.

Mais supposons qu'au lieu de connaître l'intégrale finie avec cinq constantes, on ne connaisse qu'une intégrale particulière du premier ordre avec deux constantes

$$(13) \quad \varphi(x, y, z, p, q, a, b) = 0.$$

Cette intégrale satisfaisant, quels que soient a et b , à l'équation proposée, si, entre l'équation (13) et ses deux premières dérivées, on élimine a et b , on devra retrouver l'équation différentielle proposée. Cela posé, supposons que a et b soient, non plus des constantes, mais des fonctions de x, y, z, p, q ; remplaçons b par une fonction arbitraire de a , et déterminons a par l'équation

$$(14) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b} \frac{db}{da} = 0;$$

a deviendra une fonction de x, y, z, p, q , déterminée par l'équation (14); les deux dérivées de l'équation (13) ne changeront pas de forme, et l'on aura cette fois une *intégrale intermédiaire avec une fonction arbitraire* déduite d'une intégrale ne contenant que deux constantes. Le même théorème s'applique à toutes les équations $V = a$ considérées au § IV.

SUR
UNE SÉRIE DE LIGNES

ANALOGUES

AUX LIGNES GÉODÉSIQUES,

PAR M. G. DARBOUX,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE, PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES
AU LYCÉE LOUIS-LE-GRAND.

Les géomètres regardent comme un des plus beaux théorèmes de Gauss celui qui est relatif à la courbure totale d'un triangle géodésique, et qui a été donné dans les *Recherches générales sur les surfaces courbes*. Le but de cette Note est de montrer que les principes donnés par Gauss ont un très-grand degré de généralité et peuvent s'appliquer à un grand nombre de questions analogues à celle qu'il a traitée le premier.

Considérons une surface définie par la formule

$$(1) \quad ds^2 = A^2 du^2 + C^2 dv^2,$$

où nous supposons, pour plus des implicité, les axes rectangulaires. Le rayon de courbure géodésique ρ_g d'une courbe quelconque, tracée sur la surface, est défini par une équation de la forme

$$(2) \quad \frac{ds}{\rho_g} = di + M du + N dv,$$

où i désigne l'angle de la tangente à la ligne avec les lignes $u = \text{const.}$,

et où l'on a

$$(3) \quad \frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial N}{\partial u} = \frac{AC}{RR'},$$

R, R' désignant les rayons de courbure de la surface.

L'équation différentielle des lignes géodésiques sera donc

$$(4) \quad di + M du + N dv = 0.$$

Cela posé, d'après un théorème bien connu, l'intégrale double

$$\iint \frac{AC du dv}{RR'} = \iint \left(\frac{dM}{dv} - \frac{dN}{du} \right) du dv,$$

étendue à tout un contour fermé, sera égale à l'intégrale

$$\int (M du + N dv),$$

prise dans un sens convenable le long du contour.

Si le contour fermé est formé de lignes géodésiques, on aura toujours, d'après l'équation (4),

$$(5) \quad \int (M du + N dv) = - \int di.$$

Cette formule équivaut, comme on sait, au théorème de Gauss.

La démonstration précédente indique plusieurs modes de généralisation du théorème de Gauss. Considérons d'abord, au lieu des lignes géodésiques, les lignes définies par l'équation différentielle plus générale

$$(6) \quad di + M du + N dv = d\varphi(u, v).$$

On obtiendra pour un contour formé de ces lignes, au lieu de l'équation (5), la suivante :

$$(7) \quad \int (M du + N dv) = - \int di - \int d\varphi(u, v);$$

la seconde intégrale simple, s'étendant à tout un contour fermé, s'annule généralement; ainsi :

Si l'on considère sur la surface des lignes satisfaisant à une équation différentielle du second ordre

$$di + M du + N dv = d\varphi(u, v),$$

où φ désigne une fonction arbitraire (nulle dans le cas des lignes géodésiques), la courbure totale d'un triangle formé de trois de ces lignes s'exprime en fonction de la somme des angles de la même manière que dans le cas des lignes géodésiques.

La formule (2) donne, pour le rayon de courbure géodésique de ces lignes, l'expression suivante :

$$\frac{ds}{\rho_g} = d\varphi(u, v).$$

Donc l'angle de contingence géodésique est la différentielle exacte d'une fonction de point. De cette propriété découlent plusieurs relations géométriques.

L'extension précédente est loin d'être la seule dont soit susceptible le théorème de Gauss.

D'abord, on peut, au lieu de considérer seulement la courbure totale, prendre une intégrale double quelconque $\iint H du dv$, qu'on mettra sous la forme $\iint \left(\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial Q}{\partial u} \right) du dv$, ce qui est toujours possible et d'une infinité de manières. Alors l'intégrale double, étendue à tous les points d'un contour fermé, pourra être remplacée comme précédemment par l'intégrale simple

$$(8) \quad \int (P du + Q dv).$$

Supposons, en outre, que les courbes qui limitent le contour satisfassent toutes à une même équation de la forme

$$(9) \quad P du + Q dv = d\varphi \left(u, v, \frac{du}{dv}, \frac{d^2 u}{dv^2}, \dots \right);$$

l'intégrale rectiligne (8) s'obtiendra sans difficulté et s'évaluera pour tout polygone formé de nos courbes, en fonction des éléments relatifs aux sommets.

On peut supposer que la fonction φ ne contienne que la dérivée première; mais il faut qu'elle contienne au moins une dérivée : sans cela, les courbes n'étant définies que par une équation du premier ordre, on ne serait pas sûr d'obtenir avec plusieurs d'entre elles un polygone fermé.

L'aire de la surface s'exprimant par une intégrale double, on voit qu'on pourra obtenir des courbes définies, par exemple, par une équation de la forme

$$(10) \quad P du + Q dv = d\varphi\left(u, v, \frac{du}{dv}\right),$$

et telle que l'aire comprise dans un triangle formé de ces courbes soit exactement assignable. Il est vrai qu'on ne saura pas toujours intégrer l'équation (10); mais la même difficulté se présente pour les lignes géodésiques sans nuire à l'intérêt du théorème de Gauss, et, d'ailleurs, la fonction arbitraire φ que nous introduisons pourra être déterminée, on le conçoit, de manière à faciliter l'intégration.

Les mêmes principes s'appliquent aux intégrales triples. Soit, en effet, une intégrale $\iiint H dx dy dz$; on pourra toujours évidemment, et d'une infinité de manières, la mettre sous la forme

$$(11) \quad \iiint \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Il suffira de résoudre l'équation indéterminée

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = H.$$

Il est, du reste, facile de donner la solution générale de cette équation. Soit A, B, C , une solution particulière. On aura généralement

$$A = A_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$B = B_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

$$C = C_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

D'après une formule connue, l'intégrale (11), étendue à tout le volume intérieur à une surface fermée, sera égale à l'intégrale double

$$(12) \quad \iint (A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma) d\sigma,$$

étendue à la surface qui limite le volume, $d\sigma$ désignant l'élément de surface, α, β, γ les angles que fait avec les axes la normale à la surface.

Cela posé, supposons que, les surfaces qui limitent le volume étant définies par une équation

$$\lambda = \varpi(x, y, z),$$

λ satisfasse à l'équation différentielle

$$(13) \quad A \frac{d\lambda}{dx} + B \frac{d\lambda}{dy} + C \frac{d\lambda}{dz} = \begin{vmatrix} \frac{d\lambda}{dx} & \frac{d\varphi}{dx} & \frac{d\psi}{dx} \\ \frac{d\lambda}{dy} & \frac{d\varphi}{dy} & \frac{d\psi}{dy} \\ \frac{d\lambda}{dz} & \frac{d\varphi}{dz} & \frac{d\psi}{dz} \end{vmatrix} = \Delta,$$

où φ, ψ sont des fonctions quelconques de λ et de ses dérivées partielles par rapport à x, y, z , prises jusqu'à un ordre quelconque. L'intégrale triple à évaluer sera remplacée par la suivante :

$$(14) \quad \iint \Delta \frac{d\sigma}{\sqrt{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}},$$

étendue aux surfaces qui limitent le volume et qu'on peut remplacer, d'après un théorème relatif aux déterminants fonctionnels, par

$$\iint d\varphi d\psi.$$

Considérons un polyèdre curviligne, formé des surfaces satisfaisant toutes à la même équation différentielle. Pour chaque face de ce polyèdre, l'intégrale double précédente pourra se remplacer évidemment par l'intégrale rectiligne

$$\int \varphi d\psi - \psi d\varphi,$$

étendue au contour. Donc :

Étant donnée une intégrale triple, on peut déterminer une classe de surfaces satisfaisant à une même équation aux dérivées partielles, et telles que

l'intégrale triple étendue à tout volume limité par ces surfaces s'exprime en fonction d'intégrales simples prises le long des arêtes du polyèdre curviligne formé des surfaces qui limitent le volume.

Les applications des propositions précédentes sont nombreuses. Je les développerai prochainement.



ÉTUDE EXPÉRIMENTALE
DE
L'ATTRACTION EXERCÉE PAR UNE BOBINE
SUR
UN BARREAU DE FER DOUX (*),

PAR M. L. SAINT-LOUP,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE STRASBOURG.

Lorsqu'on soumet un barreau de fer doux mobile suivant son axe à l'action du courant qui traverse une bobine cylindrique dont l'axe coïncide avec l'axe du barreau, l'attraction exercée dépend à la fois des données de l'expérience et de la position relative du barreau et de la bobine. Divers physiciens ont étudié cette action, mais dans des conditions particulières, quelquefois trop vaguement définies pour donner lieu à des conclusions précises et généralement ne comprenant pas un nombre suffisant d'expériences pour faire connaître l'ensemble des lois qui régissent le phénomène. J'ai entrepris une série d'expériences pour connaître l'influence des diverses variables dont il dépend.

Travaux antérieurs. — Avant de définir le but de mes recherches, j'énoncerai les principaux résultats auxquels on est parvenu, et qui

(*) Cette étude a été entreprise sous les auspices de l'Association Scientifique de France, qui a bien voulu subvenir aux frais des expériences.

sont consignés dans les traités de Wiedemann et de Müller, où l'on trouve sur ce sujet les indications les plus complètes :

(*a*) Le diamètre des tours de spire est sans influence sur la quantité de magnétisme donnée au barreau quand celui-ci dépasse assez la bobine des deux côtés. Quand le barreau ne dépasse pas la bobine, les bobines étroites agissent plus énergiquement que les bobines larges.

(*b*) La quantité de magnétisme du barreau est proportionnelle à l'intensité du courant (dans certaines limites d'intensité du courant) (Lenz et Jacobi).

(*c*) Si, autour d'un cylindre de fer doux, des courants d'égale intensité circulent dans le même nombre de spires, le magnétisme développé est indépendant du fil et de l'écartement des spires.

(*d*) L'action totale est proportionnelle au nombre des spires.

(*e*) Dans tous les cylindres massifs de fer de même longueur, avec la même spirale et la même intensité de courant, le magnétisme est proportionnel au diamètre du cylindre (Müller).

A ces propositions, Müller a joint une formule qui représente la puissance magnétisante d'une bobine, c'est-à-dire le produit de l'intensité du courant par le nombre des tours. Il a trouvé

$$p = 220 d^{\frac{3}{2}} \tan \frac{m}{0,00005.d^{\frac{3}{2}}};$$

d est le diamètre du barreau, et m une quantité proportionnelle au magnétisme développé; c'est la différence des tangentes des déviations produites sur une aiguille aimantée par la bobine : 1° quand le barreau est libre; 2° quand il est enlevé.

Lenz et Jacobi avaient, de leur côté, trouvé que le moment magnétique était proportionnel à $i\sqrt{d}$.

Les travaux de Hankel l'ont conduit aux lois suivantes :

(*f*) L'attraction d'un barreau aimanté par une bobine traversée par un courant est directement proportionnelle au carré de l'intensité du courant et au carré du nombre de tours du fil enroulé sur la bobine, aussi longtemps que l'aimantation du barreau n'approche pas du maximum.

Ce résultat a été aussi obtenu par Dub.

(*g*) L'attraction maximum a lieu quand le bord supérieur de la bo-

bine est à peu près au niveau du bord supérieur du barreau. Cette position dépend d'ailleurs de la longueur du barreau et de celle de la bobine.

(*h*) L'attraction est à peu près proportionnelle à la racine carrée des barreaux.

Dub avait aussi trouvé que cette loi était vérifiée dans de certaines limites.

Telles sont les lois qui se rapprochent le plus, par leur nature, de celles qui font l'objet de mes recherches. Les travaux de Hankel, en particulier, sont ceux qui touchent le plus près à l'étude que j'ai entreprise.

La critique de toutes ces expériences serait longue et sans grande portée; elle résultera naturellement de l'ensemble de mes observations. Toutefois, il n'est pas inutile d'en faire comprendre le caractère sur un exemple. Si je prends la dernière loi formulée par Hankel et par Dub, elle me semble donner lieu aux observations suivantes. D'abord le rapport des attractions exercées par une bobine sur deux barreaux n'est pas indépendant de la distance de la bobine à laquelle sont placés les deux barreaux. Par cela seul (supposé exact), la loi perdrait toute valeur. D'autre part, la loi n'est pas la même si la bobine est invariable ou si la longueur du fil et sa hauteur seules sont fixes. Elle est d'ailleurs formulée dans la première hypothèse; mes expériences ne l'ont pas confirmée, mais elles ont fait connaître l'influence du diamètre du barreau sur le travail de l'attraction pour la course totale du barreau, élément important à considérer d'abord au point de vue pratique, et en outre parce que l'introduction de cet élément écarte la considération de la distance du barreau à la bobine, variable qui n'est pas suffisamment définie, ainsi que d'autres encore, dans la plupart des propositions énoncées.

Il en résulte que ces propositions peuvent être en partie vraies, en partie fausses; en tout cas, elles ne sont qu'approchées, et l'on verra par la suite que la traduction des lois qui régissent le phénomène étudié ne comporte pas un énoncé.

But des recherches. — Le but que je me suis proposé est d'étudier principalement le travail de l'attraction exercée par une bobine sur un

barreau de fer doux dirigé suivant l'axe de la bobine et pénétrant dans l'intérieur. Parmi les variables dont dépend cette attraction, on a considéré l'intensité du courant, le diamètre de la bobine, sa hauteur, la longueur des barreaux, leur diamètre et le diamètre du fil de la bobine.

Dans les expériences, on a écarté d'abord deux de ces variables, l'intensité du courant et le diamètre du fil.

Division de la question. — Ainsi, on a opéré sur des bobines construites avec le même fil et l'intensité du courant restant constante. La question a été divisée de la manière suivante :

I. Étude de l'action d'un courant circulaire de diamètre variable sur un barreau donné et à diverses distances.

II. Étude de l'action d'une bobine de faible hauteur et de diamètre variable sur un barreau donné et à diverses distances.

III. Étude de l'action d'une bobine de diamètre constant et de hauteur variable sur un barreau donné et à diverses distances.

Chacune de ces études comportait encore comme variables la longueur et le diamètre du barreau. Enfin, on a examiné l'influence du diamètre du fil de la bobine.

Nécessité de nouvelles expériences. — Hankel, Marianini, Feilitsch ont aussi examiné diverses dispositions propres à augmenter l'énergie de l'action; j'ai renoncé à introduire dans mes recherches des variables nouvelles, et je me suis borné, pour le moment, à expérimenter sur des barreaux pleins et des bobines cylindriques. L'ensemble de ces expériences conduira à la connaissance des lois de l'action de la bobine sur le barreau, et des conditions qu'il convient de réaliser pour obtenir le travail maximum d'une machine électro-magnétique fondée sur cette action. Je ne me suis pas attaché à traduire les lois en formules : la formule exacte n'aurait pu être simple, et une formule simple n'aurait pu traduire les résultats avec une approximation suffisante. D'ailleurs, il est évident que les conditions trouvées ne peuvent *à priori* être regardées comme définitives et convenant à la machine en mouvement, puisque le mouvement du barreau déterminera des courants d'induction ayant pour effet d'affaiblir l'intensité du courant de la pile. Le travail que peut fournir la machine se trouve ainsi diminué à mesure que

la vitesse augmente, et a pour limite le travail correspondant à la chaleur dégagée par l'action chimique.

La production du travail dans une machine électro-magnétique étant due au développement des courants d'induction, il paraît naturel de chercher à favoriser le développement de ces courants, et, pour cela, de chercher les dispositions les meilleures pour augmenter la vitesse de la pièce au mouvement de laquelle ce développement est dû, puisque le courant induit est proportionnel à cette vitesse.

Le mode d'action de la machine étant d'abord choisi d'une manière générale, il faut étudier les dispositions particulières propres à augmenter l'énergie de cette action. C'est la machine construite d'après les résultats de l'observation qui servira ensuite à l'étude de l'action dynamique.

L'étude dont je viens de tracer le cadre exigeait que l'on pût mesurer rapidement et avec une précision suffisante l'attraction d'une bobine sur un barreau dans les diverses conditions que l'on avait en vue. Voici la disposition que j'ai adoptée.

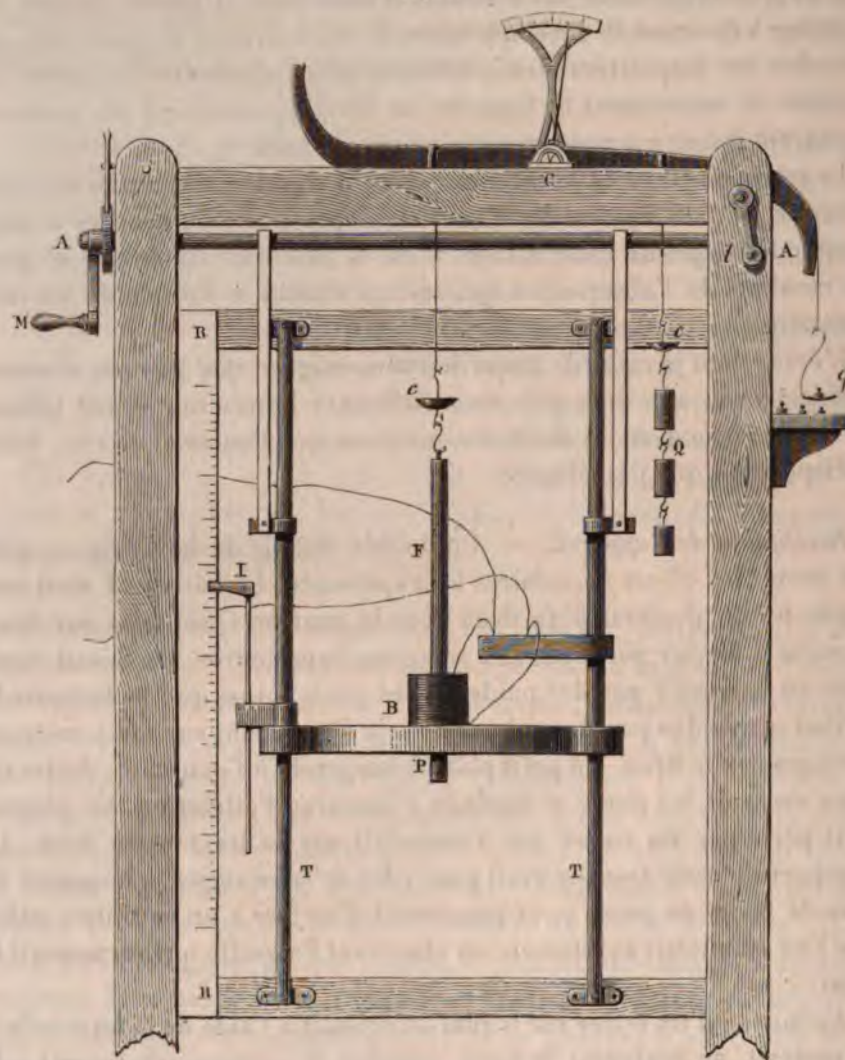
Description de l'appareil. — Un double châssis de bois (*fig. 1*) portait toutes les pièces nécessaires à l'expérience. Le barreau F était suspendu à l'un des bras d'un fléau dont le couteau C reposait sur deux coussinets d'acier poli fixés aux traverses supérieures. On faisait équilibre au barreau F par des poids Q. Ces poids, ainsi que le barreau F, étaient suspendus par des rubans de soie s'appuyant sur deux secteurs ménagés sur le fléau. Un petit plateau suspendu à l'extrémité droite du fléau recevait les poids q destinés à mesurer l'attraction. Ce plateau était porté par un ruban qui s'enroulait sur la tranche du fléau. La courbure de cette tranche avait pour effet de faire varier la longueur du bras de levier du poids q , et permettait d'arriver à un équilibre stable que l'on établissait exactement en observant l'aiguille qui surmontait le fléau.

Au moyen d'un levier sur lequel on agissait à l'aide de la manivelle L, on pouvait, en soulevant le fléau, remettre le couteau exactement à la même place, afin que l'axe du barreau eût une position constante.

La bobine B était placée sur un plateau P horizontal et mobile parallèlement à lui-même, de façon que son centre décrivit l'axe du bar-

reau. A cet effet, deux douilles fixées au plateau glissaient sur des tiges parallèles TT fixées au châssis. Ces douilles étaient supportées par deux

Fig. 1.



rubans qui, en s'enroulant ou se déroulant sur l'axe AA à l'aide de la manivelle M, produisaient le mouvement ascendant ou descendant du plateau. Un cliquet permettait de fixer le plateau en un point quel-

conque de sa course. La position de ce plateau était connue au moyen d'un index I relié au plateau et glissant avec lui le long d'une règle RR divisée en millimètres.

Enfin, le courant était amené de la pile dans une pièce de bois fixée à l'une des douilles et contenant du mercure dans des cavités ménagées dans son épaisseur. En mettant dans deux de ces cavités les extrémités du fil de la bobine ainsi que celles du fil de la pile, le circuit était fermé.

Une boussole de tangentes et un rhéostat placés dans le circuit donnaient le moyen de vérifier la constance du courant et de la maintenir.

Manière d'opérer. — Pour faire une expérience, on procédait de la manière suivante. On suspendait le barreau F au ruban du fléau à l'aide d'anneaux et de crochets rendant cette opération facile; on faisait contre-poids avec les poids Q suspendus de la même manière. Deux petites coupelles *c, c* pouvaient recevoir l'appoint nécessaire pour un équilibre rigoureux. Cela fait, on plaçait la bobine sur le plateau, de façon qu'en élevant celui-ci le barreau pénétrât exactement dans la bobine. On amenait alors le plateau, en tournant la manivelle M, dans une position telle, que l'extrémité inférieure du barreau affleurât la face supérieure de la bobine. Ajoutant alors la demi-longueur du barreau à la demi-longueur de la bobine, on avait la distance du centre du barreau au centre de la bobine. On faisait glisser la tige qui porte l'index I de façon à amener l'index à la division de la règle correspondant à la distance des centres. Dès lors, si l'on faisait monter ou descendre le plateau, l'index I marquait constamment sur la règle la distance du centre du barreau au centre de la bobine, distance que nous appellerons, pour abréger, *distance des centres*. On vérifiait la position du fléau à l'aide du levier de relèvement; on s'assurait que la bobine était bien placée, en constatant que le mouvement du plateau ne troublait pas l'équilibre. On descendait le plateau, et l'on fermait le circuit. Enfin, on réglait le courant à l'aide du rhéostat de façon que la déviation de la boussole atteignît une valeur déterminée constante. L'expérience était dès lors complètement préparée.

En tournant la manivelle M, on montait lentement la bobine; quand l'aiguille du fléau quittait le zéro, on commençait les pesées :

de petits chocs sur le châssis facilitaient les oscillations du fléau. Pour plus de commodité dans la représentation des résultats de l'expérience, on effectuait les pesées lorsque l'index I marquait un nombre entier de centimètres représentant, comme on sait, la distance des centres.

Le poids q était évalué en grammes et décigrammes. On pouvait ainsi former un tableau tel que le suivant :

Bobine	Déviatiou.....
Barreau.....	Tangente
x distance des centres	q attraction exercée.
.....
.....
.....

Représentation des résultats. — Les résultats pouvaient être figurés par une courbe où la distance des centres était prise pour abscisse et l'attraction pour ordonnée. L'aire de cette courbe, mesurée au planimètre ou autrement, donnait le travail de l'attraction. La comparaison des travaux avec les diverses données expérimentales était le principal objet que l'on avait en vue.

Barreaux. — Les barreaux soumis à l'expérience étaient des barreaux cylindriques de fer doux. Leur diamètre était de 1, 2, 3 centimètres, et leur longueur de I, II, III, IV, V, VI décimètres. Nous désignerons par III-2 le barreau de III décimètres de long et de 2 centimètres de diamètre. La suite des expériences a conduit à employer principalement les barreaux de 1 centimètre de diamètre et à examiner deux nouveaux barreaux III-0,37 et III-0,73.

Bobines. — Les bobines formaient deux séries : l'une composée de bobines *larges*, l'autre de bobines *longues*. Les bobines de la première série avaient une faible hauteur, 14 millimètres, la même pour toutes. Elles étaient formées de bobines annulaires de dix spires de fil répétées

sur dix couches. Ces anneaux, au nombre de six, pouvaient entrer exactement les uns dans les autres et former ainsi des bobines de hauteur constante et de diamètre croissant. Nous les désignerons par les n^{os} [1], [2], [3], [4], [5], [6], et par [2-5] la bobine formée par les anneaux 2, 3, 4, 5. La bobine [1] donnait exactement passage au barreau de 1 centimètre; on la remplaçait par une autre pouvant donner passage au barreau de 2 centimètres quand on opérait sur ce barreau.

Les dimensions de ces bobines sont définies par le tableau suivant :

BOBINES.	DIAMÈTRE en millimètres.	LONGUEUR DE FIL en mètres.
[1]	37	7,3
[12]	65	23,4
[13]	93	48,0
[14]	121	81,4
[15]	149	124,2
[16]	177	175,7

Le fil qui composait le circuit était du fil de cuivre de 1 millimètre de diamètre, recouvert de coton, ce qui augmentait son diamètre de 0^{mm},4.

Ces bobines étaient destinées à reconnaître l'influence du diamètre de la bobine. Les anneaux isolés pouvaient être employés à étudier l'action d'un circuit élémentaire.

La seconde série de bobines, dites *bobines longues*, se composait de trois bobines de 18 couches de fil et dont les hauteurs étaient 3, 6, 12 centimètres; en les combinant, on avait des bobines de 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21 centimètres de hauteur et de même diamètre égal à 62 millimètres. Ces bobines seront désignées par leur hauteur.

Outre ces deux séries de bobines, on a employé quatre bobines de même hauteur et de même longueur de fil, donnant exactement passage aux quatre barreaux III-0,37, III-0,73, III-1, III-2, et enfin des bobines de même hauteur, de même diamètre intérieur et de même résistance : les premières pour étudier l'influence du diamètre du barreau, les autres pour examiner l'influence du diamètre du fil de la bobine.

Je vais exposer maintenant les résultats de mes recherches dans l'ordre indiqué plus haut.

I. — Étude de l'action d'un courant circulaire, de diamètre variable, sur un barreau donné.

Cette étude a principalement pour but de fournir des éléments à la comparaison de l'action d'un courant circulaire avec celle de la série de courants qui constitue une bobine. Elle a été faite au moyen des bobines [1], [2], [3], [4], [5], [6], formées, comme on sait, d'un faisceau de 100 spires; l'emploi d'une spire unique aurait exigé un courant trop intense.

On a d'abord fait agir sur le barreau I-1, à diverses distances, la bobine [1], puis les bobines [2], [3], [4], [5], [6], l'intensité du courant restant constante. On a ainsi obtenu les nombres ci-dessous, qui représentent l'attraction exercée :

I-1. DISTANCES.	ATTRACTION DES BOBINES					
	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
5	1,15	0,80	0,60	0,40	0,32	0,28
4	2,80	1,60	1,00	0,60	0,35	0,30
3	3,20	2,00	1,25	0,70	0,40	0,30
2	2,50	1,70	1,05	0,60	0,30	0,25
1	1,50	1,10	0,70	0,35	0,25	0,20

On a effectué la même série d'observations sur le barreau III-1, ce qui a donné le second tableau :

III-1. DISTANCES.	ATTRACTION DES BOBINES					
	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
15	1,80	1,40	1,10	0,75	0,60	0,50
14	3,70	2,30	1,50	1,00	0,75	0,65
13	3,40	2,70	1,70	1,10	0,90	0,89
12	2,90	2,60	1,75	1,20	1,00	0,90
10	2,15	1,90	1,60	1,15	1,00	0,90
8	1,50	1,30	1,20	0,95	0,85	0,80
6	1,05	0,95	0,90	0,75	0,70	0,65
4	0,75	0,70	0,65	0,55	0,50	0,45

Enfin, en opérant sur le barreau V-1, on a pu dresser le troisième tableau :

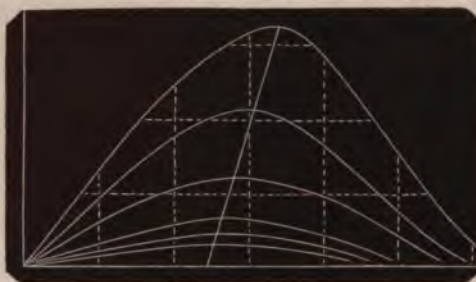
V-1. DISTANCES.	ATTRACTION DES BOBINES					
	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
25	2,90	2,00	1,40	0,90	0,70	0,65
24	4,80	2,90	1,70	1,00	0,85	0,80
23	3,90	3,00	1,90	1,10	0,90	0,85
22	3,20	2,70	2,00	1,10	1,00	0,90
20	2,45	2,20	1,80	1,05	1,00	0,95
17	1,70	1,60	1,30	0,90	0,85	0,80
14	1,15	1,00	0,90	0,70	0,65	0,60
10	0,60	0,55	0,52	0,50	0,45	0,40
6	0,35	0,32	0,28	0,24	0,20	0,18

La conclusion la plus générale à tirer de ces tableaux est que l'*attraction diminue à mesure que le diamètre du circuit augmente*, et que la loi de ce décroissement dépend de la distance à laquelle on considère l'*attraction*. On voit, par exemple, dans le dernier tableau, que l'action de la bobine [1], qui vaut six fois celle de la bobine [6] à la distance 24, en est seulement le double à la distance 17.

On peut encore observer que *la distance pour laquelle l'action d'un circuit est maximum dépend du diamètre du circuit, et qu'elle est d'autant plus grande que le diamètre du circuit est plus petit.*

La *fig. 2* représente les résultats consignés dans le premier tableau; les distances y sont prises pour abscisses, et les courbes successives se

Fig. 2.



rapportent aux six bobines employées. Ces diverses courbes sont asymptotes à l'axe des abscisses.

Rapprochons les nombres que nous venons de trouver de ceux qui mesurent l'action des bobines [1], [1-2], [1-3],... (§ III), et nous arriverons à une conclusion assez remarquable.

Considérons, par exemple, les actions des bobines [1], [2], [3],... sur le barreau III-1; à la distance 13, nous avons,

340	270	170	110	90	80
-----	-----	-----	-----	----	----

dont les racines carrées sont

18,4	16,4	13,0	10,5	9,6	9
------	------	------	------	-----	---

Ajoutons les deux premières, puis les trois premières, etc., on a

18,4	34,8	43,8	54,3	63,9	72,6
------	------	------	------	------	------

dont les carrés sont

340	1210	1920	2950	4080	5270
-----	------	------	------	------	------

Or les actions des bobines [1], [1-2], [1-3], ..., sont, à la division 13 (fig. 4),

5 14 26 38 54 68

nombres proportionnels aux précédents.

Essayons le même rapprochement sur les nombres correspondant à une autre distance, 8 par exemple, nous trouvons encore la même loi.

Désignons par $A_{1,6}$ l'action de la bobine [2-3], et de même des autres. La relation fournie par les considérations précédentes sera

$$A_{1,6} = (\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2} + \dots + \sqrt{A_6})^2,$$

ou

$$\sqrt{A_{1,6}} = \sqrt{A_1} + \sqrt{A_2} + \dots + \sqrt{A_6},$$

ou

$$\sqrt{A_{1,6}} - \sqrt{A_{1,5}} = \sqrt{A_6},$$

ce que l'on peut énoncer de la manière suivante :

La racine carrée de l'attraction exercée par une spirale plane sur un barreau est égale à la somme des racines carrées des actions des spires successives agissant isolément sur le barreau ;

Ou encore :

La différence des racines carrées des actions de deux spirales planes est égale à la racine carrée de l'action de la spirale qui en est la différence.

II. — Étude de l'action d'une bobine de diamètre variable et de faible hauteur sur un barreau donné.

Les expériences ont été faites avec les six bobines

[1] [1-2] [1-3] [1-4] [1-5] [1-6]

sur les barreaux

I-1 II-1 III-1 IV-1 V-1 VI-1

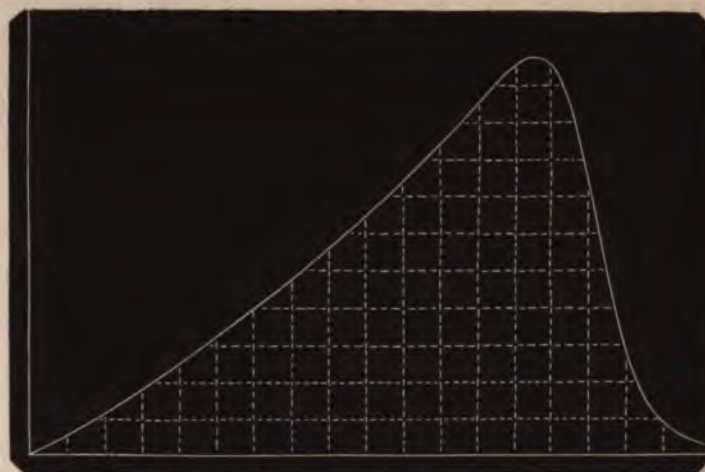
Je crois inutile de rapporter ici toutes les observations relatives à cette série d'expériences, et qui comprendraient trente-six tableaux analogues au suivant, qui contient les résultats obtenus par l'action de

la bobine [1-3] sur le barreau III-1. L'attraction q est exprimée en grammes, la distance x en centimètres.

Bobine..... [1-3]		Déviation..... 11° 40'	
Barreau..... III-1		Tangente..... 0,206	
x	q	x	q
18	0,4	12	9,4
17	0,8	10	7,2
16	2,8	8	5,6
15	7,6	6	3,8
14	10,6	4	2,4
13	10,4	2	1,0

La représentation graphique des résultats donne (fig. 3) la courbe suivante :

Fig. 3.



Les divisions de l'axe des abscisses représentent des centimètres. (Les figures jointes au texte n'ont pas été construites toutes à la même échelle, parce qu'un certain nombre d'entre elles auraient eu des dimensions trop petites ou trop grandes.)

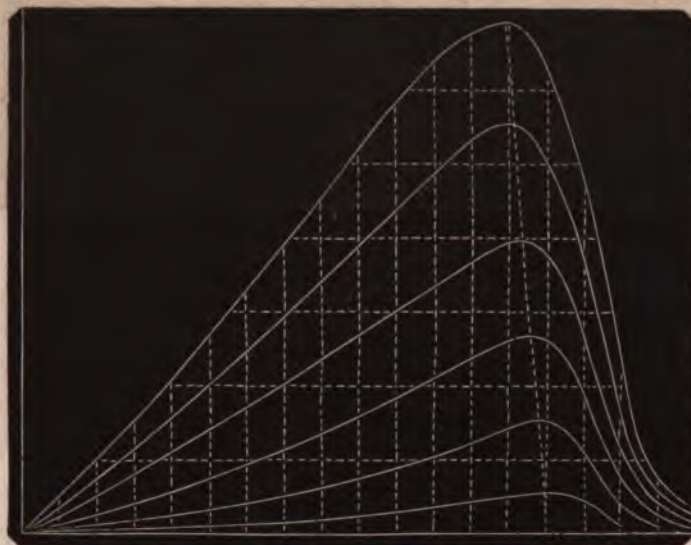
Influence de la distance. — L'allure de cette courbe montre que l'attraction croît d'abord à peu près proportionnellement à la distance des centres presque jusqu'au moment où elle atteint son maximum; elle décroît ensuite très-rapidement d'abord, puis par degrés insensibles.

Toutefois l'allure de la courbe n'est pas identique pour tous les barreaux, et s'il y a des analogies, il y a aussi des différences dont nous nous occuperons tout à l'heure et qui montrent que la remarque précédente n'est pas d'une application générale.

Influence du diamètre de la bobine. — Occupons-nous d'abord de comparer l'action sur un même barreau de la série des bobines. Il suffit pour cela de jeter les yeux sur la figure suivante, où les courbes successives, à partir de l'abscisse, représentent les actions des bobines successives. [1], [1-2], [1-3], [1-4], [1-5], [1-6] sur le même barreau III-1.

On voit (fig. 4) que, pour les diverses positions relatives du barreau et de la bobine, l'attraction augmente avec le diamètre de la bobine;

Fig. 4.



mais ces attractions ne croissent pas dans le même rapport à toutes les distances, et ce rapport n'est pas constant pour la même distance. On voit

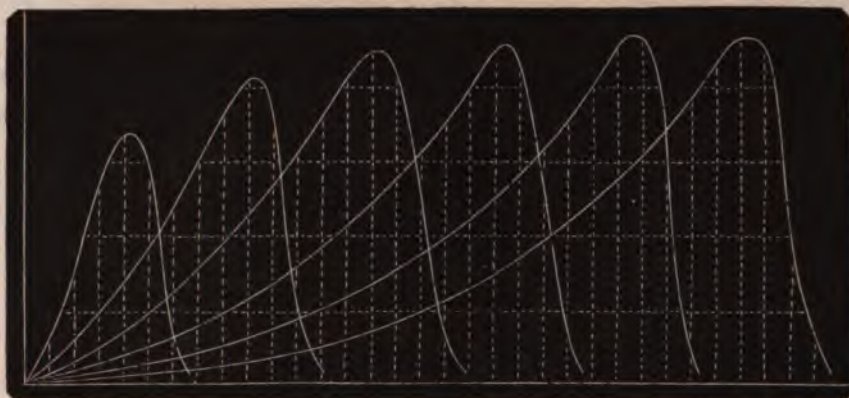
aussi que la distance des centres pour laquelle l'action est *maximum* diminue un peu à mesure que le diamètre de la bobine augmente, et que cette distance, pour un barreau de 30 centimètres, reste comprise entre 13 et 14 centimètres quand le diamètre extérieur de la bobine varie de 37 à 177 millimètres. L'extrémité du barreau ne dépasse alors le centre de la bobine que de 1 à 2 centimètres.

Influence de la longueur du barreau. — Pour reconnaître l'influence de la longueur du barreau, faisons agir la bobine [1-2] sur les barreaux

I-1 II-1 III-1 IV-1 V-1 VI-1.

La représentation graphique des résultats donne (*fig. 5*) les courbes suivantes :

Fig. 5.



Les abscisses ont été réduites dans le rapport de 3 à 1.

Ces courbes ne donnent lieu à aucune remarque simple. On voit que la valeur de l'attraction maximum paraît tendre vers une constante à mesure que la longueur du barreau augmente. On peut aussi observer que cette attraction maximum se produit quand l'extrémité du barreau a dépassé le centre de la bobine d'une longueur sensiblement constante et voisine de 1 centimètre, quelle que soit la longueur du barreau.

Comparaison des travaux. — Passons maintenant à la comparaison des travaux développés dans les diverses conditions où nous nous sommes placés.

Évaluons le travail de l'attraction pour la course totale, nous trou-

vons, pour l'aire des courbes correspondant à l'action des bobines,

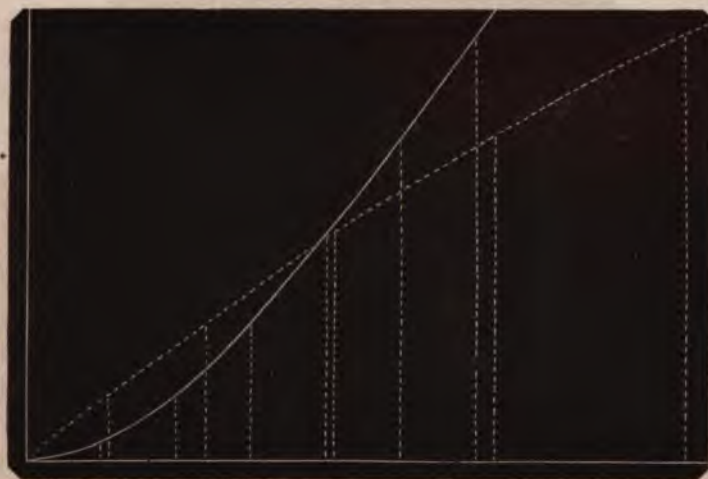
[1] [1-2] [1-3] [1-4] [1-5] [1-6]

sur le barreau III-1 les nombres

28 89 192 304 425 563

Construisons (*fig. 6*) la courbe du travail, en prenant le travail pour ordonnée; la courbe figurée en trait plein représente la marche

Fig. 6.



du travail en fonction du diamètre de la bobine; celle qui est figurée en traits interrompus représente la marche du travail en fonction de la longueur du fil de la bobine.

Le diamètre intérieur de la bobine était de 12 millimètres, et le diamètre extérieur a varié de 12 à 177 millimètres. On voit que *le travail croît à peu près proportionnellement à la longueur du fil*, dans cet intervalle; car la courbe ponctuée s'infléchit légèrement vers l'axe des abscisses.

Si nous comparons de même les travaux développés par l'action d'une bobine donnée [1-2], par exemple, sur la série des barreaux

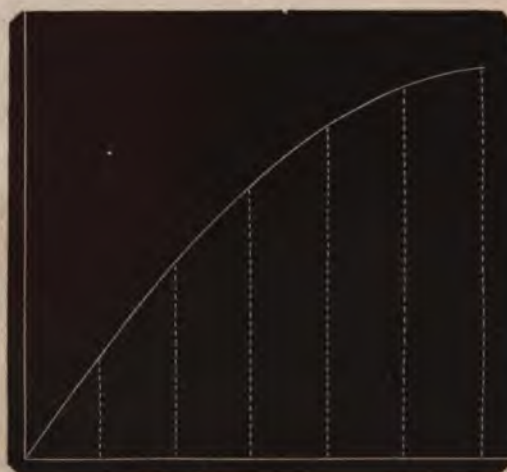
I-1 II-1 III-1 IV-1 V-1 VI-1,

nous trouvons que ces travaux sont représentés par les nombres

34 64 89 110 123 131

Représentons aussi ces résultats. La *fig. 7* montre que *le travail développé croît avec la longueur du barreau et semble tendre vers une constante.*

Fig. 7.



Des observations et des calculs analogues, effectués sur la série des barreaux de 1 centimètre de diamètre à l'aide de la série des bobines larges, conduisent à la formation du tableau suivant, dans lequel la première colonne verticale renferme les longueurs de circuit des bobines [1], [1-2], [1-3], [1-4], [1-5], [1-6]; les autres colonnes donnent les travaux développés par l'action de ces bobines sur la série des barreaux.

Tableau du travail de l'action de la série des bobines de même hauteur sur la série des barreaux de même diamètre.

LONGUEURS.	I-1	II-1	III-1	IV-1	V-1	VI-1
7,4	11	21	28	33	38	41
23,4	34	64	29	110	123	131
48,0	63	135	192	240	262	280
81,4	94	201	304	371	412	433
124,0	126	285	425	525	580	620
175,7	155	365	563	685	771	820

Si nous comptons sur un axe ox les longueurs du circuit, sur oy celles du barreau, et sur oz le travail, nous pouvons construire une surface dont l'ordonnée représentera le travail en fonction de la longueur du fil et de la longueur du barreau, et qui présente ainsi le résumé graphique de toutes les expériences qui précèdent.

Les principales conclusions à tirer de là sont : 1° qu'il est avantageux d'augmenter autant que possible la longueur du barreau; 2° qu'il conviendrait aussi de distribuer sur plusieurs bobines de même hauteur la même longueur de fil plutôt que de construire avec ce fil une bobine unique. Ainsi trois bobines de 60 mètres de fil donneraient un travail représenté par 33, tandis qu'une bobine unique de 180 mètres donnerait 29. Toutefois, l'avantage ainsi obtenu est assez faible relativement à la complication mécanique qu'il exige.

III. — *Étude de l'action d'une bobine de hauteur variable et de diamètre constant sur un barreau donné.*

Influence de la hauteur de la bobine. — Nous venons de voir que le travail augmentait rapidement avec la longueur du barreau; prenons le barreau V-1 et faisons agir sur ce barreau les bobines de hauteur 6, 12, 18, 21, nous obtenons (*fig. 8*) les résultats représentés par les courbes ci-après :

Les distances des centres ont été réduites dans le rapport de 10 à 4, afin de réunir dans la même figure toutes les courbes obtenues. Les courbes relatives aux bobines [3], [9], [15] ont été intercalées.

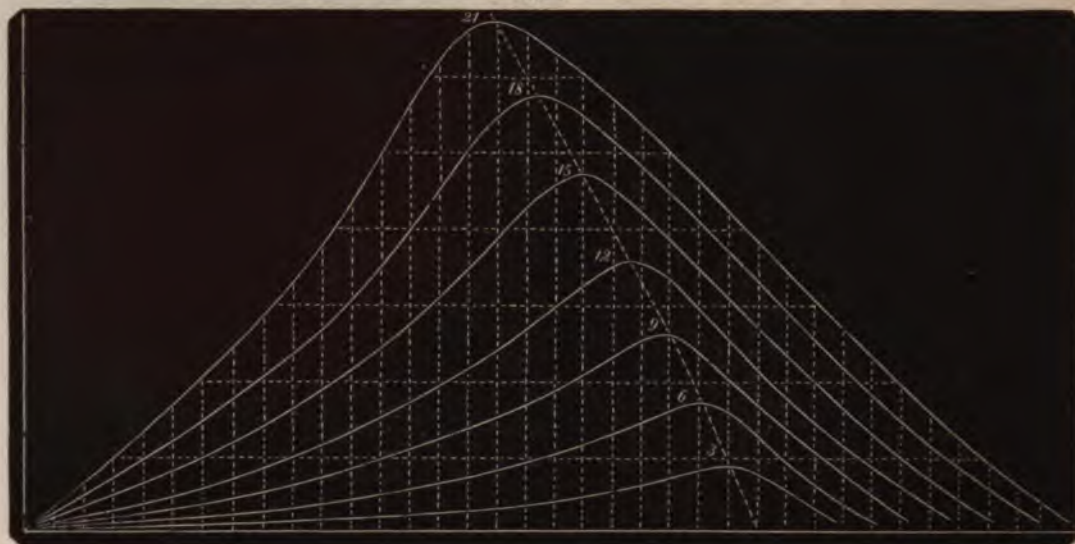
On voit que l'action de la bobine est continuellement croissante, ainsi que le travail. La distance des centres correspondant au maximum d'action diminue à mesure que la longueur de la bobine augmente, et varie de 24 à 15 centimètres, la longueur du barreau étant de 25 centimètres. L'effet maximum a sensiblement lieu quand l'extrémité du barreau va dépasser celle de la bobine; car, si l'on ajoute la demi-longueur de la bobine à la distance des centres, on trouve

23,5 + 1,5, 22,5 + 3, 21 + 4,5, 20 + 6, 18 + 7,5, 17 + 9, 15,5 + 11,5,

ce qui donne une somme qui varie de 25 à 27, et par conséquent s'écarte peu de la demi-longueur du barreau. Il est clair que cette marche du

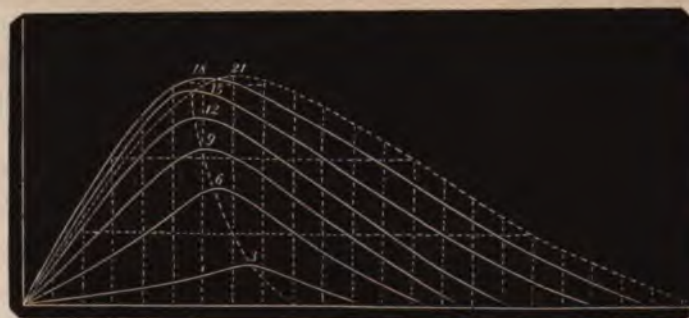
maximum ne saurait se maintenir quand la longueur de la bobine approche de celle du barreau, et on le voit déjà par les rapprochements que nous venons de faire.

Fig. 8.



Dans cette série d'expériences, la hauteur de la bobine n'a atteint que les $\frac{21}{50}$ de celle du barreau. Pour nous rendre compte des modifications que peut subir la loi manifestée par la représentation graphique, quand la longueur de la bobine atteint celle du barreau, répétons la même série d'expériences avec le barreau II-1, nous obtenons (fig. 9) la série de courbes suivante :

Fig. 9.

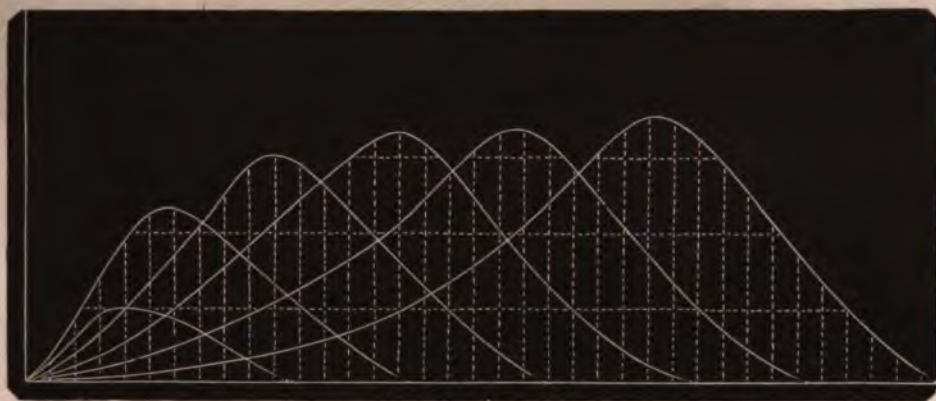


Il faut en conclure que la marche de l'attraction subit un notable

changement quand la longueur de la bobine est voisine de celle du barreau. Ainsi, le maximum qui s'approche de l'origine jusqu'à la bobine 12 s'en éloigne avant la bobine 15, et ses variations diminuent rapidement. L'attraction de la bobine 21, dont la longueur dépasse celle du barreau et dont la courbe est dessinée en traits interrompus, est plus faible que celle de la bobine 18 entre l'origine et le maximum, et elle est plus forte au delà, comme on pouvait le prévoir.

Influence de la longueur du barreau. — Ce qui précède met en évidence l'influence de la longueur de la bobine, le barreau étant donné. Si maintenant nous prenons une bobine déterminée, la bobine 12 par exemple, et si nous soumettons à l'action de cette bobine la série des barreaux, nous reconnaissons que l'action est représentée (*fig. 10*) par la série des courbes ci-dessous.

Fig. 10.



On voit par là que *l'attraction maximum semble tendre vers une constante à mesure que la longueur du barreau augmente*. Quant à la distance des centres correspondant au maximum d'effet, elle est sensiblement égale à la demi-longueur du barreau diminuée de la demi-longueur de la bobine, c'est-à-dire que l'extrémité inférieure du barreau coïncide à peu près avec l'extrémité inférieure de la bobine.

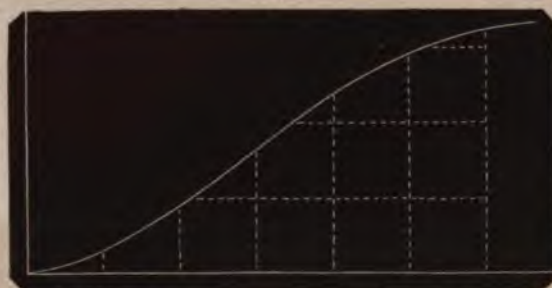
Comparaison des travaux. — Si maintenant nous comparons les travaux développés dans les diverses dispositions observées, nous arrivons aux résultats qui suivent.

L'évaluation du travail de l'attraction des bobines successives sur le barreau II-1, attraction représentée dans la *fig. 9*, donne, pour les bobines

	3	6	9	12	15	18
les nombres	30	84	140	215	270	295

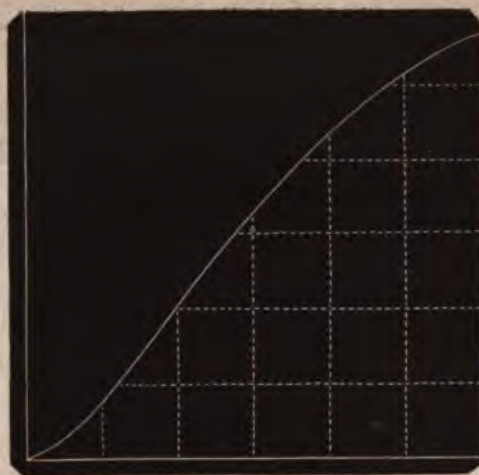
La *fig. 11* fait connaître la marche du travail en fonction de la hauteur de la bobine.

Fig. 11.



On voit que le travail croît d'abord plus rapidement, et ensuite plus lentement, que la hauteur de la bobine.

Fig. 12.



De même, l'évaluation du travail de l'attraction exercée par la bo-

bine 12 sur les barreaux

I-1 II-1 III-1 IV-1 V-1 VI-1

donne les nombres

65 215 325 430 510 560

représentés (*fig. 12*) par la courbe ci-contre, dont l'ordonnée mesure le travail en fonction de la longueur du barreau.

Répétons les mêmes séries d'observations avec les autres bobines, et nous formerons le tableau ci-dessous :

Tableau du travail développé par l'action de la série des bobines de même diamètre sur la série des barreaux de même diamètre.

BOBINES.	I-1	II-1	III-1	IV-1	V-1	VI-1
3	15	30	40	50	60	65
6	35	84	107	140	180	210
9	55	140	200	280	340	380
12	65	215	325	430	510	560
15	»	270	450	630	740	810
18	»	295	580	830	1000	1120
21	»	»	690	1030	1240	1370

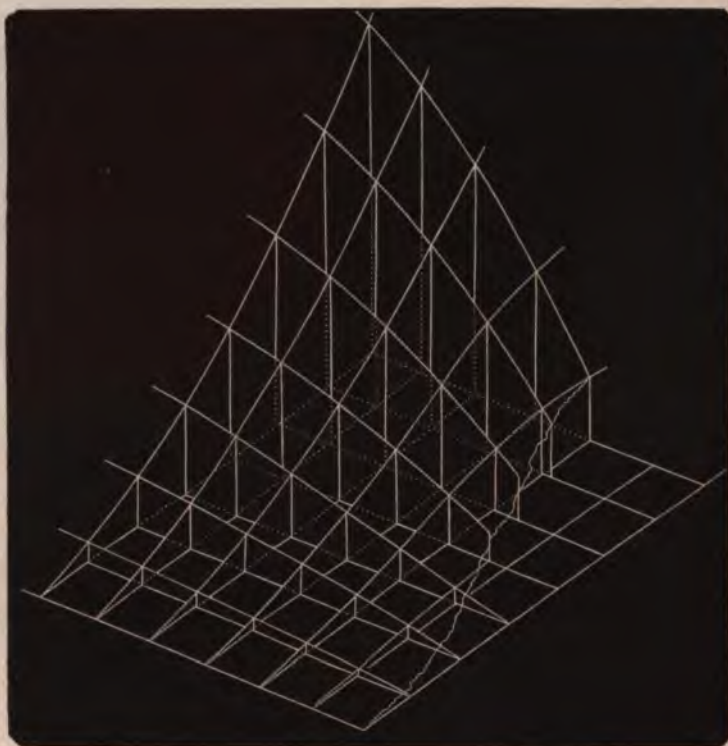
Portons (*fig. 13*) sur une droite *ox* la hauteur des bobines, sur *oy* la longueur des barreaux, et parallèlement à *oz* le travail, la surface ainsi construite résumera cette seconde série d'expériences.

L'inspection du tableau ou de la surface qui le représente met suffisamment en évidence l'influence de la hauteur de la bobine et de la longueur du barreau sur le travail de l'attraction pour la course totale du barreau, et montre la nécessité d'employer des barreaux longs si l'on veut augmenter le travail, l'intensité du courant restant la même.

On voit aussi qu'il y a lieu d'augmenter la hauteur de la bobine en même temps que celle du barreau, car deux bobines identiques de faible hauteur, agissant sur deux barreaux identiques, fourniront un travail plus petit qu'une bobine de hauteur double et de même lon-

gueur de fil que l'ensemble des deux premières agissant sur l'un des barreaux.

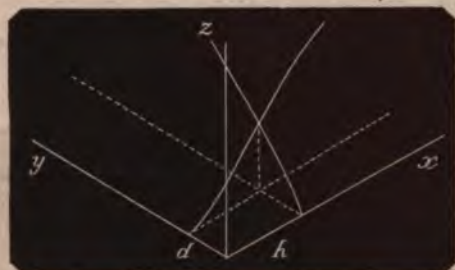
Fig. 13.



Travail d'une bobine de hauteur et de diamètre variables sur un barreau donné. — Pour arriver à des conclusions plus précises, considérons un barreau déterminé; faisons agir sur ce barreau une série de bobines de même diamètre d et de hauteurs croissantes x , et une autre série de bobines de même hauteur h et de diamètre croissant y ; mesurons le travail dans ces deux séries d'expériences, et soient ox , oy , oz trois axes de coordonnées (fig. 14). Portons sur ox les hauteurs des bobines de diamètre d , sur oy la longueur des bobines de hauteur h . Dans le plan $y = d$ traçons la courbe du travail en fonction de la hauteur x de la bobine; traçons aussi dans le plan $x = h$ la courbe du travail en fonction de la longueur du fil, nous aurons deux courbes qui se coupent au point (h, d) .

Le point (h, d) définit les dimensions de la bobine, et le z de ce point mesure le travail. Le lieu des courbes ainsi obtenues est une surface dont l'ordonnée représente le travail de l'attraction pour un barreau déterminé. L'expérience n'a donné que deux de ces courbes; nous

Fig. 14.



admettrons, sauf vérification, que les plans parallèles aux zx ou aux zy donneraient dans la surface des courbes respectivement semblables à celles qui ont été directement obtenues.

Traçons maintenant dans le plan xoy l'hyperbole $xy = \text{const.}$, et considérons le cylindre parallèle à oz ayant pour base cette hyperbole. Ce cylindre coupe la surface suivant une courbe dont l'ordonnée mesure le travail correspondant à une longueur de fil constante. On reconnaît ainsi que, pour un barreau de 30 centimètres, la hauteur de bobine qui fournit le travail maximum est voisine de 18 centimètres.

La position du point qui correspond au maximum peut être définie géométriquement, en observant que la trace du plan tangent à la surface en ce point doit être parallèle à la tangente à l'hyperbole au point projeté. Il en résulte que les sous-tangentes aux deux courbes $d = \text{const.}$ et $h = \text{const.}$, qui se croisent en ce point, sont proportionnelles à h et d . Si donc la courbe $h = \text{const.}$ était une droite (ce qui est peu éloigné de la vérité), le point correspondant au travail maximum s'obtiendrait en menant par son origine une tangente à la courbe $d = \text{const.}$; d'où il résulterait immédiatement que, dans cette hypothèse, *la hauteur de la bobine donnant le travail maximum est indépendante de la longueur du circuit pour un barreau donné.*

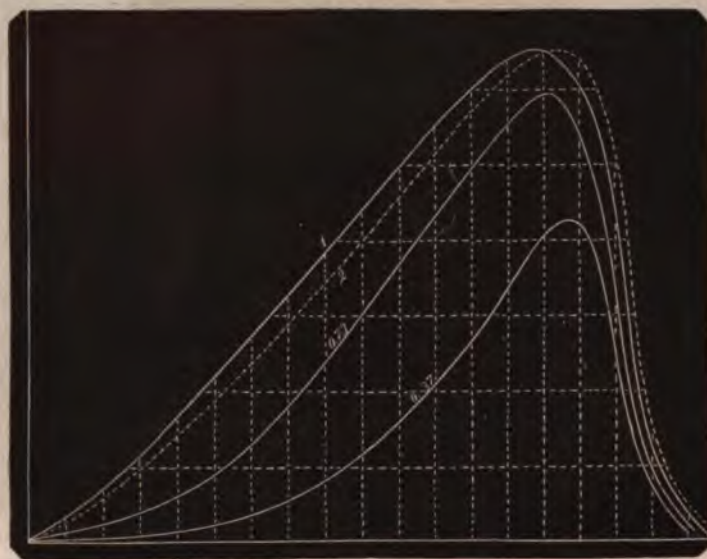
Ainsi, la longueur du barreau détermine la hauteur de la bobine, la longueur du fil dont on dispose détermine le diamètre de la bobine.

Nous avons vu que le barreau devait être pris aussi long que possible; étudions maintenant l'influence de son diamètre.

IV. — Influence du diamètre du barreau.

Bobines donnant exactement passage au barreau. — On a pris quatre barreaux de 3 décimètres de longueur et dont les diamètres étaient en

Fig. 15.



centimètres 0,37; 0,73; 1, 2, et l'on a fait agir sur ces barreaux des bobines de même longueur de fil et de même hauteur donnant exactement passage aux divers barreaux mis en expérience; la bobine 1 faisait partie de la série. L'évaluation du travail dû l'action des bobines sur les barreaux

III-0,37	III-0,73	III-1	III-2
----------	----------	-------	-------

a donné les nombres

14	24	33	31
----	----	----	----

On a répété l'expérience en ajoutant à la première bobine la bo-

bine [2-4], de façon que le diamètre de la bobine était grand relativement à celui du barreau, et l'on a trouvé pour le travail

$$115 \quad 212 \quad 324 \quad 310,$$

nombres à peu près proportionnels aux précédents et manifestant une loi semblable. La *fig. 15* représente les courbes obtenues dans cette dernière expérience.

Il résulte de là que, pour une bobine de même résistance et de diamètre intérieur égal à celui du barreau, le travail croît avec le diamètre du barreau jusqu'à une certaine limite, puis décroît. Cette limite n'est pas rigoureusement indépendante du diamètre de la bobine; toutefois, il paraît inutile d'employer des barreaux dont le diamètre excède 1^e,5 à 2 centimètres quand le diamètre de la bobine n'est pas supérieur à 10 ou 12 centimètres.

D'après les expériences qui viennent d'être rapportées, il conviendrait de prendre le barreau de 14 millimètres environ de diamètre.

Bobine invariable. — Lorsque la bobine est invariable, l'action exercée sur le barreau ne suit plus la même loi. Prenons, par exemple, la bobine [2-3] et mesurons son action sur les trois barreaux II-1, II-2, II-3 de 2 décimètres de long et de 1, 2, 3 décimètres de diamètre, nous obtenons les résultats suivants :

DISTANCES.	ATTRACTION DES BOBINES			
	[2-3]			[1-3]
	II-1	II-2	II-3	II-1
9	2,25	3,40	5,00	6,30
10	1,50	2,35	3,90	4,30
11	0,80	1,10	1,60	1,50

On voit par là que l'action augmente avec le diamètre du barreau jusqu'à ce qu'il atteigne le diamètre intérieur de la bobine : c'est ce que mettent en évidence les trois premières colonnes du tableau. La

quatrième colonne donne les attractions observées sur le barreau II-1, en ajoutant la bobine [1] au circuit et ramenant l'intensité du courant à sa première valeur. La comparaison des nombres de cette colonne avec ceux de la colonne voisine montre que l'action de la bobine [1-3] sur II-1 est plus énergique que celle de [2-3] sur II-3.

Bobine de diamètre extérieur constant. — L'influence de la différence du diamètre du barreau et du diamètre intérieur de la bobine est mise en évidence par les nombres du tableau ci-dessous :

DISTANCES.	[6]	[5-6]	[4-6]	[3-6]	[2-6]	[1-6]
15	0,18	0,70	1,82	3,63	6,00	9,60
13	0,20	0,87	2,34	4,78	8,60	14,70
10	0,18	0,87	2,33	4,62	8,45	12,00
8	0,15	0,78	2,08	3,96	7,10	9,20
6	0,10	0,70	1,61	3,03	5,25	6,90

qui représentent l'attraction exercée sur le barreau III-1 par les bobines [6], [5-6], [4-6], [3-6], [2-6], [1-6], l'intensité du courant restant constante. Il est donc très-important qu'il y ait aussi peu de jeu que possible entre le barreau et la bobine.

V. — Influence du diamètre du fil.

Prenons trois bobines de même hauteur, de même diamètre intérieur égal à celui du barreau III-1 et de même résistance, construites avec des fils dont les diamètres sont en millimètres

0,6 1 1,3

Mesurons l'action de ces bobines sur le barreau III-1 et évaluons le travail total; nous trouvons qu'il est représenté par les nombres

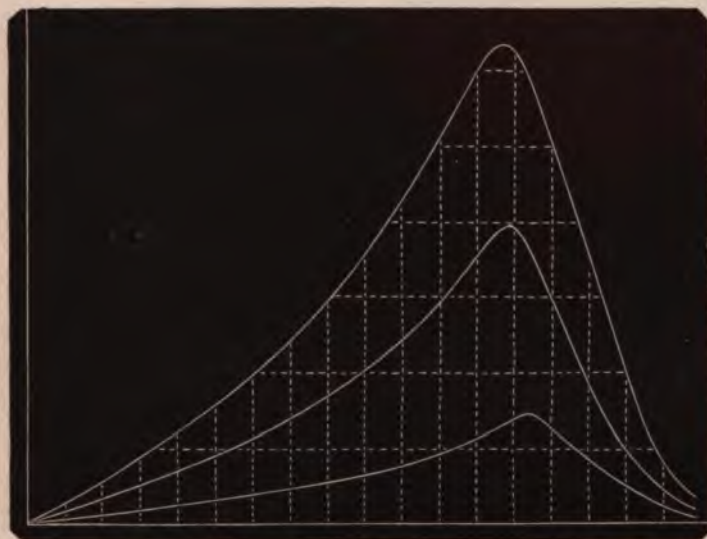
196 542 970

Or les longueurs des circuits formés par ces trois fils sont proportionnelles aux nombres

36 100 169

Divisons le travail par la longueur du circuit, nous trouvons un nombre sensiblement constant : 5,4. De là, cette conclusion : *Le travail produit est proportionnel à la longueur du circuit, la hauteur des bobines restant constante.* Il est clair que l'on ne doit point à priori exagérer cette conséquence, et que l'on doit se borner à en conclure qu'il convient de construire les bobines avec de gros fils. La *fig. 16* représente les résultats des expériences faites avec ces trois bobines sur le barreau III-1.

Fig. 16.



Ici se terminent les expériences que j'ai entreprises. Elles ont porté sur les éléments dont il m'a paru nécessaire d'établir l'influence pour éclairer la construction des bobines et des barreaux sur lesquels on les fait agir. Cette étude n'est pas complète assurément, mais elle peut suffire, d'une part, comme base d'expériences sur un genre de moteurs électro-magnétiques; d'autre part, comme contrôle à une théorie mathématique de l'action d'une bobine sur un barreau.

RECHERCHES

SUR LA

FLEXION DE LA LUNETTE MÉRIDIENTE,

PAR M. L.-J. GRUEY,

PROFESSEUR AU LYCÉE DE CLERMONT-FERRAND.

INTRODUCTION.

1. Si toutes les parties d'une lunette méridienne formaient un système parfaitement rigide, l'axe optique aurait une direction constante par rapport à trois droites liées invariablement à ce système. Mais les deux canons ou les deux moitiés du tube, qui réunit l'objectif à l'oculaire, fléchissent individuellement sous l'action de leur poids, autour de leur axe commun de rotation et suivant toute probabilité de quantités inégales. Il en résulte, lorsque la hauteur de la lunette varie, un changement dans la direction de l'axe optique, à l'intérieur de l'instrument.

Le cercle de déclinaison qui accompagne ordinairement la lunette méridienne se déforme par son propre poids; mais les effets de cette déformation disparaissent, en grande partie, dans la moyenne des lectures faites à des microscopes placés symétriquement, par rapport à la verticale, autour du centre de la graduation.

L'axe de rotation fléchit aussi sous le poids de tout le système; mais, comme cette flexion est à peu près constante pour les diverses hauteurs de la lunette, son influence sur l'observation n'est que du second ordre.

2. La flexion du tube est ainsi la principale et la seule que nous voulions étudier spécialement. Elle peut produire sur l'axe optique d'une

grande lunette un déplacement angulaire supérieur à 1 seconde. Il est donc nécessaire de la déterminer pour rendre comparables entre elles des observations faites à des hauteurs différentes. De l'aveu de tous les astronomes, cette détermination a été jusqu'à ce jour très-imparfaite. La discussion des méthodes suivies dans les divers observatoires exigerait des développements trop longs pour trouver place ici. Il nous suffira de dire qu'elles reposent toutes sur des suppositions plus ou moins gratuites, dont l'erreur peut être, dans certains cas, de l'ordre de la flexion à mesurer.

La flexion est si mal connue, que, pour l'éliminer autant que possible, l'observateur *doit toujours* rapporter les positions du Soleil et des planètes à des étoiles situées sur le parallèle de ces astres ou sur des parallèles très-voisins.

3. L'objet de notre travail est de montrer qu'il est possible de mesurer la flexion, comme un tour de vis, une distance de fils, en dehors de toute hypothèse, par des moyens purement physiques et pour une hauteur quelconque de la lunette.

Dans la première Partie, nous établissons des formules générales qui expriment les effets optiques de la flexion sur un système de lentilles sphériques dont les centres sont distribués dans le voisinage d'une droite.

Dans la seconde Partie, nous déduisons, de la mesure directe de quelques-uns de ces effets, la *flexion astronomique* ou la correction qu'il faut apporter aux observations méridiennes, pour tenir compte de la flexion de la lunette.

PREMIÈRE PARTIE.

§ I. — Réfraction.

1. *Réfraction par une surface.* — Considérons un premier et un second milieu, d'indices de réfraction n et n' , traversés successivement

par un rayon de lumière qui se brise à leur surface de séparation. Soient $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'; \lambda, \mu, \nu$ les cosinus des angles formés avec trois axes rectangulaires ox, oy, oz par les directions respectives du rayon incident, du rayon réfracté et de la normale à la surface au point d'incidence. Nous supposons la direction de la normale prise dans le sens du rayon réfracté, et que β, γ, μ, ν sont de petites quantités du premier ordre.

Les lois de la réfraction donnent rigoureusement

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha' = l\alpha \pm m\lambda, \\ \beta' = l\beta \pm m\mu, \\ \gamma' = l\gamma \pm m\nu, \end{cases}$$

et

$$(2) \quad \frac{1 - (\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma)^2}{1 - (\lambda\alpha' + \mu\beta' + \nu\gamma')^2} = \frac{n'^2}{n^2},$$

l et m désignant des quantités positives et le signe \pm répondant à $n' \gtrless n$.

Les relations (1), (2), jointes à celles qui unissent les trois cosinus d'une même direction, donnent facilement

$$l = \frac{n}{n'}, \quad m = \pm \frac{n' - n}{n'},$$

et par suite

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha' = \frac{n}{n'}\alpha + \frac{n' - n}{n'}\lambda, \\ \beta' = \frac{n}{n'}\beta + \frac{n' - n}{n'}\mu, \\ \gamma' = \frac{n}{n'}\gamma + \frac{n' - n}{n'}\nu, \end{cases}$$

en négligeant le second ordre dans m et α' , et le troisième dans β' et γ' .

2. *Réfraction par une suite de surfaces sphériques dont les centres sont voisins d'une ligne droite.* — Prenons cette droite pour axe des x , et conservons pour chaque surface les notations du numéro précédent affectées du nombre d'accents qui répond au rang de cette surface.

Désignons par $\rho, \rho', \rho'', \dots$ les rayons des diverses surfaces, par N, N', N'', \dots les abscisses de leurs intersections avec ox , par $M, \eta, \zeta; M', \eta', \zeta', \dots$ les coordonnées de leurs centres. Les abscisses M, M', \dots sont finies, et les ordonnées latérales $\eta, \zeta, \dots; \eta', \zeta', \dots$ des petites quantités du premier ordre.

Désignons encore par $a, b, c; a', b', c', \dots$ les coordonnées des divers points d'incidence successive du rayon lumineux, qui sont du même ordre de grandeur que les coordonnées correspondantes des centres.

Les équations du rayon incident et successivement réfracté seront, en négligeant le troisième ordre,

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \beta(x - N) + b, \\ z = \gamma(x - N) + c; \\ y = \beta'(x - N') + b', \\ z = \gamma'(x - N') + c'; \\ y = \beta''(x - N'') + b'', \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

puisque $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ ne diffèrent de 1 et a, a', a'', \dots de N, N', N'', \dots que d'une quantité du second ordre.

Les formules (3) établies généralement ont lieu pour chaque réfraction.

Il s'agit de trouver $\beta', \gamma'; \beta'', \gamma''; \dots; b', c'; b'', c''; \dots$; connaissant β, γ et b, c .

Si l'on remarque que

$$\begin{aligned} b &= \rho\mu + \eta, & b' &= \rho'\mu' + \eta', \dots, \\ c &= \rho\nu + \zeta, & c' &= \rho'\nu' + \zeta', \dots, \end{aligned}$$

on aura d'abord, en chassant $\mu, \nu; \mu', \nu'; \dots$ des relations (3),

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} n'\beta' = n\beta + \frac{n' - n}{\rho}(b - \eta), \\ n'\gamma' = n\gamma + \frac{n' - n}{\rho}(c - \zeta), \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Écrivant ensuite que le premier rayon réfracté passe par (a, b, c) , le second par (a', b', c') , ..., et remplaçant a par N , on aura, par les équations (4),

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} b' = b + \beta'(N' - N), \\ c' = c + \gamma'(N' - N), \\ \dots\dots\dots, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Les relations (5) et (6) permettent évidemment de suivre le rayon lumineux dans ses réfractions successives.

3. Comme les quantités $\beta, \beta', \dots; \gamma, \gamma', \dots$ sont accompagnées, dans les relations (5), des facteurs n, n', \dots , qui n'existent pas dans les relations (6), posons, pour faciliter l'usage de ces relations,

$$\begin{array}{ll} n\beta = B, & n\gamma = C, \\ n'\beta' = B', & n'\gamma' = C', \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots \end{array}$$

Posons encore, dans le même but,

$$\begin{array}{ll} \frac{n' - n}{\rho} = r, & \frac{N' - N}{n'} = s', \\ \frac{n'' - n'}{\rho'} = r', & \frac{N'' - N'}{n''} = s'', \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ \frac{n^{p+1} - n^p}{\rho^p} = r^p, & \frac{N^p - N^{p-1}}{n^p} = s^p; \end{array}$$

les équations successives du rayon lumineux seront, en négligeant le troisième ordre,

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{B}{n}(x - N) + b, \\ z = \frac{C}{n}(x - N) + c; \\ y = \frac{B'}{n'}(x - N') + b', \\ z = \frac{C'}{n'}(x - N') + c'; \\ \dots\dots\dots, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

avec les conditions

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} B' = rb + B - r\eta, \\ b' = s'B' + b; \\ B'' = r'b' + B' - r'\eta', \\ b'' = s''B'' + b'; \\ \dots\dots\dots, \\ \dots\dots\dots, \end{array} \right.$$

et un système de relations identique à (8), en $C, C', \dots; c, c', \dots$, qu'il est inutile d'écrire.

4. Soit $(p + 1)$ le nombre des surfaces réfringentes. L'avant-dernier rayon réfracté sera

$$y = \frac{B^p}{n^p}(x - N^p) + b^p,$$

$$z = \frac{C^p}{n^p}(x - N^p) + c^p,$$

et le rayon émergent

$$y = \frac{B^{p+1}}{n^{p+1}}(x - N^{p+1}) + b^{p+1},$$

$$z = \frac{C^{p+1}}{n^{p+1}}(x - N^{p+1}) + c^{p+1}.$$

Mais, comme toutes les surfaces ont été traversées, N^{p+1} , b^{p+1} , c^{p+1} ne peuvent être considérés que comme les coordonnées du point d'incidence du rayon final sur une surface arbitraire, ou comme les coordonnées d'un point arbitraire de ce rayon. Choisissons le point d'émergence en prenant $N^{p+1} = N^p$, et par suite $b^{p+1} = b^p$ et $c^{p+1} = c^p$; le dernier couple des équations (7), formé des équations du rayon émergent, sera

$$y = \frac{B^{p+1}}{n^{p+1}}(x - N^p) + b^{p+1},$$

$$z = \frac{C^{p+1}}{n^{p+1}}(x - N^p) + c^{p+1},$$

et le dernier couple des conditions (8) sera

$$B^{p+1} = r^p b^p + B^p - r^p \eta^p,$$

$$b^{p+1} = b^p.$$

Les conditions (8) et les conditions identiques en $C, c; C', c', \dots$ permettront de passer de proche en proche du rayon incident au rayon émergent.

5. Le système (8) ne se résout pas immédiatement par l'emploi des fractions continues; mais nous le décomposons en systèmes successifs, solubles immédiatement par ces fractions, de la manière suivante.

Considérons généralement le système

$$\begin{aligned} A_2 &= a_0 A_1 + A_0 - \alpha_0, \\ A_3 &= a_1 A_2 + A_1, \\ &\dots\dots\dots, \\ A_{2i} &= a_{2i-2} A_{2i-1} + A_{2i-2} - \alpha_{2i-2}, \\ A_{2i+1} &= a_{2i-1} A_{2i} + A_{2i-1}, \\ A_{2i+2} &= a_{2i} A_{2i+1} + A_{2i} - \alpha_{2i}. \end{aligned}$$

On en tire, en procédant de bas en haut par divisions successives,

$$(9) \quad \frac{A_{2i+2}}{A_{2i+1}} = a_{2i} + \frac{1}{a_{2i-1} + \frac{1}{a_{2i-2} + \dots + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_0 + \frac{1}{\frac{A_1 + B_1}{A_0 + B_0}}}}}};$$

en posant successivement et dans le même ordre

$$(9') \quad \left\{ \begin{aligned} B_2 &= a_0 B_1 + B_0 + \alpha_0, \\ B_3 &= a_1 B_2 + B_1, \\ &\dots\dots\dots, \\ B_{2i} &= a_{2i-2} B_{2i-1} + B_{2i-2} + \alpha_{2i-2}, \\ 0 &= a_{2i-1} B_{2i} + B_{2i-1}, \\ 0 &= B_{2i} + \alpha_{2i}. \end{aligned} \right.$$

Ce nouveau système, abstraction faite des deux dernières relations qui déterminent B_{2i-1} et B_{2i} , est de même forme que le système pri-

mitif, à cela près que le signe des quantités α est changé. On aura donc, par le même procédé,

$$(10) \quad \frac{B_{2i}}{B_{2i-1}} = a_{2i-1} + \frac{1}{a_{2i-2}} + \dots + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_0 + \frac{1}{\frac{B_1 + C_1}{B_0 + C_0}}}},$$

avec

$$(10') \quad \left\{ \begin{array}{l} C_2 = a_0 C_1 + C_0 - \alpha_0, \\ C_3 = a_1 C_2 + C_1, \\ \dots\dots\dots, \\ C_{2i-2} = a_{2i-4} C_{2i-3} + C_{2i-4} - \alpha_{2i-4}, \\ 0 = a_{2i-3} C_{2i-2} + C_{2i-3}, \\ 0 = \quad \quad \quad C_{2i-2} - \alpha_{2i-2}, \end{array} \right.$$

et ainsi de suite jusqu'à un dernier système de même forme

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_2 = a_0 H_1 + H_0 \pm \alpha_0, \\ 0 = a_1 H_2 + H_1, \\ 0 = \quad \quad \quad H_2 \pm \alpha_1, \end{array} \right.$$

le signe $+$ et le signe $-$ correspondant au cas de i impair et de i pair.

6. Si donc on désigne les dernières réduites des fractions

$$a_m + \frac{1}{a_{m-1} + \frac{1}{a_{m-2}} + \dots + \frac{1}{a_0}},$$

et

$$a_m + \frac{1}{a_{m-1} + \frac{1}{a_{m-2}} + \dots + \frac{1}{a_1}},$$

respectivement par $\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$ et $\frac{p'_m}{q'_m}$, on a, par les relations (9), (10), (11)

et la théorie élémentaire des fractions continues,

$$\begin{aligned}
 + (A_i + B_i) &= - (p_{2i+1} A_{2i+1} - q_{2i+1} A_{2i+2}), \\
 - (B_i + C_i) &= + (p_{2i-1} B_{2i-1} - q_{2i-1} B_{2i}), \\
 &\dots\dots\dots, \\
 \pm (G_i + H_i) &= \mp (p_i G_i - q_i G_{i+1}), \\
 \mp (H_i \pm \alpha_i) &= \pm (p_i H_i - q_i H_{i+1}),
 \end{aligned}$$

les signes supérieurs correspondant à i impair et les inférieurs à i pair.

En ajoutant ces équations membre à membre, et remarquant qu'en vertu des deux dernières relations (9'), (10') et (11)

$$\begin{aligned}
 B_{2i-1} &= a_{2i-1} \alpha_{2i}, & B_{2i} &= -\alpha_{2i}, \\
 C_{2i-3} &= -a_{2i-3} \alpha_{2i-2}, & C_{2i-2} &= \alpha_{2i-2}, \\
 &\dots\dots\dots, & &\dots\dots\dots, \\
 H_i &= \pm a_i \alpha_i, & H_{i+1} &= \mp \alpha_i,
 \end{aligned}$$

on trouve

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} p_{2i+1} A_{2i+1} - q_{2i+1} A_{2i+2} &= -A_i + (p_{2i-1} a_{2i-1} + q_{2i-1}) \alpha_{2i} \\ &+ (p_{2i-3} a_{2i-3} + q_{2i-3}) \alpha_{2i-2} \\ &+ \dots\dots\dots \\ &+ (p_i a_i + q_i) \alpha_2 \\ &+ \alpha_0. \end{aligned} \right.$$

On aura de même

$$\begin{aligned}
 + (A_i + B_i) &= + (p'_{2i+1} A_{2i+1} - q'_{2i+1} A_{2i+2}), \\
 - (B_i + C_i) &= - (p'_{2i-1} B_{2i-1} - q'_{2i-1} B_{2i}), \\
 &\dots\dots\dots, \\
 \pm (G_i + H_i) &= \pm (p'_i G_i - q'_i G_{i+1}), \\
 \mp (H_i \mp a_i \alpha_i) &= 0,
 \end{aligned}$$

et par suite

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} p'_{2i+1} A_{2i+1} - q'_{2i+1} A_{2i+2} &= A_i + (p'_{2i-1} a_{2i-1} + q'_{2i-1}) \alpha_{2i} \\ &+ (p'_{2i-3} a_{2i-3} + q'_{2i-3}) \alpha_{2i-2} \\ &+ \dots\dots\dots \\ &+ (p'_i a_i + q'_i) \alpha_i \\ &+ a_i \alpha_i. \end{aligned} \right.$$

Mais on a

$$p_{m-1}a_{m-1} + q_{m-1} = p_m \quad \text{et} \quad p'_{m-1}a_{m-1} + q'_{m-1} = p'_m.$$

Si donc nous posons

$$(14) \quad \begin{cases} \omega_a = -p_{2i} \alpha_{2i} - p_{2i-1} \alpha_{2i-1} - \dots - p_1 \alpha_1 - p_0 \alpha_0, \\ \omega'_a = p'_{2i} \alpha_{2i} + p'_{2i-1} \alpha_{2i-1} + \dots + p'_1 \alpha_1, \end{cases}$$

avec la convention $p_0 = 1$, et si nous résolvons (12) et (13) par rapport à A_{2i+1} , A_{2i+2} , nous obtenons

$$\begin{aligned} A_{2i+1} &= q'_{2i+1}(A_0 + \omega_a) + q_{2i+1}(A_1 + \omega'_a), \\ A_{2i+2} &= p'_{2i+1}(A_0 + \omega_a) + p_{2i+1}(A_1 + \omega'_a). \end{aligned}$$

7. Pour appliquer ces formules générales au système (8), il suffit de remplacer

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2i}$$

par

$$r, s', r', \dots, r^p,$$

et

$$\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_{2i}$$

par

$$r\eta, r'\eta', \dots, r^p\eta^p;$$

il vient alors, en désignant par R , R' et S , S' les valeurs actuelles de p_{2i+1} , p'_{2i+1} et q_{2i+1} , q'_{2i+1} , et par ω , ω' celles de ω_a , ω'_a ,

$$(15) \quad \begin{cases} B^{p+1} = R(b + \omega') + R'(B + \omega), \\ b^{p+1} = S(b + \omega') + S'(B + \omega), \end{cases}$$

où ω , ω' sont de l'ordre de η , η' .

Si l'on remplace dans ω , ω' les quantités η , η' ,... par ζ , ζ' ,... et qu'on désigne les résultats par ϖ , ϖ' , il vient, par les mêmes raisons,

$$(15') \quad \begin{cases} C^{p+1} = R(c + \varpi') + R'(C + \varpi), \\ c^{p+1} = S(c + \varpi') + S'(C + \varpi), \end{cases}$$

où ϖ , ϖ' sont de l'ordre de ζ , ζ' ,...

Le rayon émergent, correspondant à un rayon incident donné, sera donc déterminé par la connaissance des huit constantes R , R' , S , S' ; ω , ω' , ϖ , ϖ' . Les quatre premières sont finies, et les quatre dernières

de l'ordre des distances des centres des surfaces réfringentes à la droite autour de laquelle ils sont distribués.

On trouvera peut-être que l'expression de ces huit constantes, au moyen des données, est remarquable par sa simplicité et son élégance.

8. *Remarque.* — Nous avons fait dans les calculs qui précèdent, et nous ferons encore dans ceux qui suivent, tacitement usage de la propriété importante des réduites d'une fraction continue exprimée par la relation

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n,$$

où $\frac{p_n}{q_n}$ désigne généralement la réduite de rang n .

§ II. — Points et plans principaux d'une lunette. Images.

9. Comme nous n'avons plus de loi de succession à mettre en évidence, nous désignerons dans ce qui suit par $B_1, b_1, C_1, c_1, N_1, n_1$ les quantités désignées jusqu'ici par $B^{p+1}, b^{p+1}, C^{p+1}, c^{p+1}, N^{p+1}, n^{p+1}$; de sorte que, le rayon incident étant

$$r = \frac{B}{n}(x - N) + b,$$

$$z = \frac{C}{n}(x - N) + c,$$

le rayon émergent sera

$$r = \frac{B_1}{n_1}(x - N_1) + b_1,$$

$$z = \frac{C_1}{n_1}(x - N_1) + c_1,$$

et l'on passera de l'un à l'autre au moyen des relations

$$(16) \quad \begin{cases} B_1 = R(b + \omega') + R'(B + \omega), \\ b_1 = S(b + \omega') + S'(B + \omega), \\ C_1 = R(c + \omega') + R'(C + \omega), \\ c_1 = S(c + \omega') + S'(C + \omega). \end{cases}$$

10. *Image d'un point.* — Si l'on écrit que le rayon incident passe

par le point (x_0, y_0, z_0) , on trouve, par un calcul facile, que le rayon émergent passe par le point (x, y, z) , tel que

$$(17) \quad \begin{cases} x = N_1 - n_1 \frac{(N - x_0)S + nS'}{(N - x_0)R + nR'}, \\ y = m(y_0 + \Omega), \\ z = m(z_0 + \Pi), \end{cases}$$

en posant

$$m = \frac{n}{nR' + (N - x_0)R},$$

$$\Omega = \omega' - (N - x_0) \frac{\omega}{n},$$

$$\Pi = \varpi' - (N - x_0) \frac{\varpi}{n}.$$

Le point p , dont les coordonnées sont x, y, z , est l'image du point p_0 , dont les coordonnées sont x_0, y_0, z_0 , ou son foyer conjugué.

Les plans P_0, P menés par p_0, p , perpendiculairement à l'axe ox , sont dits *plans conjugués*.

11. En assujettissant p_0 ou p et par suite P_0 et P à de certaines conditions particulières, on obtient *les points et les plans principaux*.

1° Les conditions $x_0 = \infty$, $\frac{y_0}{x_0} = \beta$, $\frac{z_0}{x_0} = \gamma$ donnent, pour l'image d'un faisceau parallèle de direction (β, γ) , le point

$$(18) \quad \begin{cases} x = N_1 - n_1 \frac{S}{R}, \\ y = -\frac{n}{R} \left(\beta + \frac{\omega}{n} \right), \\ z = -\frac{n}{R} \left(\gamma + \frac{\varpi}{n} \right); \end{cases}$$

le plan P est alors le *plan focal principal*, et son abscisse x le *foyer principal*.

Il est utile de remarquer sur les formules (18) que ω et ϖ sont nuls si l'on choisit pour ox la droite menée, dans la direction d'un faisceau parallèle, par le point image de ce faisceau.

2° La condition $m = 1$ détermine x_0 et x , et donne

$$x_0 = N + n \frac{R' - 1}{R},$$

$$x = N_1 - n_1 \frac{S - 1}{R}.$$

P_0 et P sont, dans ce cas, les plans principaux de première et seconde espèce, dits *plans principaux de Gauss*.

3° La condition du parallélisme des rayons incident et émergent exige que l'on ait

$$x_0 = N - \frac{n_1 - n R'}{R}, \quad x = N_1 - \frac{n - n_1 S}{R},$$

$$y_0 = -\left(\frac{R'}{R} \omega + \omega'\right), \quad y = -\omega,$$

$$z_0 = -\left(\frac{R'}{R} \varpi + \varpi'\right), \quad z = -\varpi;$$

les points p_0, p ainsi définis sont les *points nodaux de Listing*.

4° Les conditions $x_0 = N$ et $x_0 = x$ donneraient respectivement l'*anneau oculaire de Biot* et les *points de Bravais* avec la même facilité.

12. *Axe de similitude*. — Si le point p_0 décrit une courbe quelconque dans le plan P_0 , le point p trace dans le plan P une courbe semblable et semblablement placée, image de la première. Le centre de similitude de ces deux courbes se déplace lorsque x_0 varie d'une manière continue et décrit un lieu géométrique qui se trouve sans difficulté. C'est une droite qui a pour équations

$$Dy - [\omega(R' - 1) + R\omega'](x - N) - (A\omega - B\omega') = 0,$$

$$Dz - [\varpi(R' - 1) + R\varpi'](x - N) - (A\varpi - B\varpi') = 0,$$

où

$$A = R'(N - N_1) + n_1 S',$$

$$B = -R(N - N_1) - n_1 S + n,$$

$$D = -B(R' - 1) - AR.$$

On pourrait appeler cette droite *axe de similitude*. Elle coïncide avec ox lorsque les centres des surfaces sphériques sont situés sur cet axe de coordonnées. Dans ce dernier cas, l'axe de similitude est lié aux plans

principaux de Gauss par une propriété bien connue, et nos formules démontrent que cette propriété est tout à fait générale. Elles conduisent en effet à la proposition suivante, qu'on vérifiera sans peine :

L'axe de similitude est toujours parallèle à la droite qui joint les points de rencontre des plans principaux de Gauss de première et seconde espèce, respectivement, avec le rayon incident et le rayon émergent.

§ III. — Effets optiques de la flexion.

13. Supposons actuellement que plusieurs ou toutes les surfaces réfringentes changent de position, en tournant autour de leurs intersections N, N', \dots avec l'axe fixe ox . Les coordonnées latérales des centres de ces surfaces varieront, et, si leurs variations sont de petites quantités du premier ou du second ordre, les formules précédentes s'appliqueront à la nouvelle position des surfaces, avec le seul soin d'y remplacer partout $\omega, \omega', \varpi, \varpi'$ par $\omega + \partial\omega, \omega' + \partial\omega', \varpi + \partial\varpi, \varpi' + \partial\varpi'$.

Ce changement est encore le seul à apporter dans ces formules, lorsque, les surfaces tournant autour de N, N', \dots , ces derniers points se déplacent en même temps sur ox de quantités très-petites par rapport aux déplacements des centres des surfaces.

Il est clair, en effet, que les formules du § II ainsi modifiées donneront encore, dans ces deux cas, l'abscisse de l'image d'un point, en négligeant le second ordre et ses ordonnées latérales, en négligeant le troisième ordre.

Le dernier cas se présente pour la lunette méridienne, qui n'est autre chose qu'un tube portant un système de lentilles à chaque extrémité, objectif et oculaire.

Ce tube, presque cylindrique, est encastré par son milieu dans le cube de l'axe horizontal de rotation. Imaginons trois axes rectangulaires, $\mu\xi, \mu\eta, \mu\zeta$, liés invariablement à un élément massif μ du tube, dont la longueur est prise pour le sens de $\mu\zeta$ (*).

(*) Il semblera peut-être que ξ, η, ζ répondant à x, y, z , nous devrions, pour la correspondance des notations des paragraphes II et III, prendre la longueur du tube pour le sens de $\mu\xi$. Mais nous serions alors obligé de rompre plus tard cette correspondance avec plus de désavantage, comme on le verra dans la seconde Partie.

Si le tube était inflexible, ses divers points auraient toujours les mêmes coordonnées ξ, η, ζ pour toute hauteur de la lunette; mais, en réalité, à chaque hauteur répond une déformation particulière du tube, sous l'action de son poids.

Or il résulte des notions élémentaires sur la flexion, appliquées aux circonstances actuelles, que, si l'on regarde comme du premier ordre les variations $\partial\eta, \partial\xi, \dots$ des ordonnées latérales du centre d'une surface réfringente, la variation $\partial N, \dots$ de l'intersection de cette surface avec $\mu\zeta$ ne sera que du second ordre.

Les formules du § II s'appliqueront donc aux divers états que la flexion fait subir au système optique d'une lunette, si, lorsque la hauteur varie, on y considère N, N', \dots et R, S, R', S' comme invariables, et $\omega, \omega', \varpi, \varpi'$ comme devant être augmentés de leurs variations, qui dépendent de cette hauteur.

14. *Flexion astronomique.* — On voit, d'après cela, quelle est l'influence de la flexion sur les observations astronomiques.

L'image (ξ, η, ζ) d'un point (ξ_1, η_1, ζ_1) lié aux axes μ est

$$(19) \quad \begin{cases} \xi = m(\xi_1 + \Omega), \\ \eta = m(\eta_1 + \Pi), \\ \zeta = N_1 - n_1 \frac{(N - \zeta_1)S + nS'}{(N - \zeta_1)R + nR'}, \end{cases}$$

où

$$m = \frac{n}{nR' + (N - \zeta_1)R},$$

$$\Omega = \omega' - \frac{\omega}{n}(N - \zeta_1),$$

$$\Pi = \varpi' - \frac{\varpi}{n}(N - \zeta_1).$$

On formera d'ailleurs $\omega, \omega', \varpi, \varpi'$, comme nous l'avons indiqué aux nos 6 et 7, au moyen des ordonnées latérales ξ, η, \dots des centres des surfaces réfringentes.

Dans le cas des observations astronomiques, on doit faire ζ_1 infini,

et si l'on désigne par α, β les limites de $\frac{\xi_1}{\zeta_1}, \frac{\eta_1}{\zeta_1}$, on a

$$(20) \quad \begin{cases} \zeta = N_1 - n_1 \frac{S}{R}, \\ \xi = -\frac{n}{R} \left(\alpha + \frac{\omega}{n} \right), \\ \eta = -\frac{n}{R} \left(\beta + \frac{\varpi}{n} \right). \end{cases}$$

Les premiers termes $-\frac{n}{R}\alpha, -\frac{n}{R}\beta$, de ξ et η , sont indépendants de la hauteur de la lunette ou de sa distance zénithale θ ; mais les seconds termes $-\frac{\omega}{R}, -\frac{\varpi}{R}$ varient avec θ suivant une loi qui dépend du tube de la lunette, et que nous avons exprimée par les relations (14), au moyen des déplacements des centres des surfaces réfringentes.

Les formules (20) donnent la position de l'image du faisceau parallèle (α, β) , dans le plan focal principal $\zeta = N_1 - n_1 \frac{S}{R}$, qui est indépendant de la flexion à notre degré d'approximation.

Soient ξ_0, η_0 les coordonnées du point de croisement des fils rectangulaires du micromètre établi au plan focal principal de la lunette; ξ_0, η_0 seront aussi des fonctions de θ , et l'on aura pour toute valeur de cette variable

$$\begin{aligned} \xi - \xi_0 &= -\frac{n}{R} \alpha - \left(\frac{1}{R} \omega + \xi_0 \right), \\ \eta - \eta_0 &= -\frac{n}{R} \beta - \left(\frac{1}{R} \varpi + \eta_0 \right). \end{aligned}$$

Supposons maintenant que la lunette passe de la distance zénithale θ à la distance zénithale quelconque $\theta + \delta\theta$, on aura, α, β étant constants,

$$(21) \quad \begin{cases} \delta(\xi - \xi_0) = -\left(\frac{1}{R} \delta\omega + \delta\xi_0 \right), \\ \delta(\eta - \eta_0) = -\left(\frac{1}{R} \delta\varpi + \delta\eta_0 \right). \end{cases}$$

L'image du faisceau parallèle (α, β) se déplacera sur le micromètre pré-

cisement de $\delta(\xi - \xi_0)$ dans le sens des ξ , et de $\delta(\eta - \eta_0)$ dans le sens des η . Ces déplacements sont indépendants de la direction du faisceau lié aux axes $\mu\xi$, $\mu\eta$, $\mu\zeta$.

Or, si, la lunette étant inflexible, α et β venaient à varier de $\delta\alpha$, $\delta\beta$, l'image se déplacerait sur le micromètre fixe de

$$-\frac{n}{R}\delta\alpha, \quad -\frac{n}{R}\delta\beta,$$

et si l'on prend

$$(22) \quad \begin{cases} \delta\alpha = \frac{\partial\omega}{n} + \frac{R}{n}\delta\xi_0, \\ \delta\beta = \frac{\partial\varpi}{n} + \frac{R}{n}\delta\eta_0, \end{cases}$$

on voit que ce déplacement réel serait le même que le déplacement apparent (21) qui a lieu pour la lunette flexible.

Si les axes $\mu\xi$, $\mu\eta$ sont parallèles aux fils rectangulaires du micromètre, $\delta\alpha$ est la *flexion en ascension droite*, $\delta\beta$ la *flexion en distance polaire*. Ce sont effectivement les corrections à apporter aux observations faites à la distance zénithale $\theta + \delta\theta$ pour les rendre comparables à celles faites à la distance θ .

15. Faisons, pour terminer cette première Partie, quelques remarques rapides sur les effets généraux de la flexion à l'égard des images, provenant de points liés aux axes μ , lorsque la lunette tourne autour de son axe :

1° Le plan focal principal, le foyer principal, les plans principaux de Gauss, les plans de Bravais restent invariables.

2° L'abscisse ζ de l'image d'un point reste invariable; mais ses ordonnées latérales ξ , η varient de $m\delta\Omega$, $m\delta\Pi$ lorsque la lunette tourne de $\delta\theta$.

L'image d'un objet plan, perpendiculaire à $\mu\zeta$ et lié à cet axe, est donc transportée parallèlement à elle-même et au plan $\xi\mu\eta$, sans altération des dimensions, à une distance

$$d = m\sqrt{\delta\Omega^2 + \delta\Pi^2},$$

et dans une direction faisant, avec l'axe $\mu\xi$, l'angle τ tel, que

$$(23) \quad \text{tang} \tau = \frac{\partial \Pi}{\partial \Omega} = \frac{n \partial \omega' - \partial \omega (N - \zeta_1)}{n \partial \varpi' - \partial \varpi (N - \zeta_1)}.$$

La relation (23) permet de trouver immédiatement le lien qui unit les abscisses ζ_1, ζ'_1 des points dont les images se déplacent à angle droit. Il est donné par l'équation

$$(\partial \omega^2 + \partial \varpi^2) \zeta_1 \zeta'_1 + n(\partial \varpi \partial \omega' + \partial \omega \partial \varpi')(\zeta_1 + \zeta'_1) + n^2(\partial \omega'^2 + \partial \varpi'^2) = 0.$$

C'est une hyperbole équilatère dont le centre est sur la bissectrice des axes des ζ_1 et ζ'_1 , et dont les asymptotes sont parallèles à ces axes. De plus, la distance du centre à l'origine est égale au demi-axe transverse de la courbe, $n\sqrt{2} \frac{\partial \omega \partial \omega' + \partial \varpi \partial \varpi'}{\partial \omega' + \partial \varpi'}$.

3° Si la flexion, répondant à la rotation $\partial \theta$ satisfaisait à la condition

$$(24) \quad \frac{\partial \omega}{\partial \varpi} = \frac{\partial \omega'}{\partial \varpi'},$$

τ serait indépendant de ζ_1 , et toutes les images seraient déplacées dans la direction constante définie par $\text{tang} \tau = \frac{\partial \omega}{\partial \varpi}$.

Réciproquement, pour que le déplacement de l'image parallèlement au plan $\xi\mu\eta$ ait lieu dans une direction fixe, τ , quelle que soit la position de l'objet, il faut que la condition (24) soit remplie. Or, si l'on se reporte aux formules (14), on voit que cela exige que, par suite de la rotation $\partial \theta$, les centres des surfaces réfringentes se déplacent tous parallèlement au plan unique $\eta = \xi \text{ tang} \tau$.

Dans le cas où cette condition (24) a lieu, les points du plan mené perpendiculairement à $\mu\xi$ par l'abscisse $\zeta_1 = N - n \frac{\partial \omega'}{\partial \omega}$ ont leurs images invariables.

4° La droite joignant les points de rencontre des plans principaux invariables de Gauss avec le rayon incident et le rayon émergent conserve son parallélisme avec l'axe de similitude. Le déplacement de cet

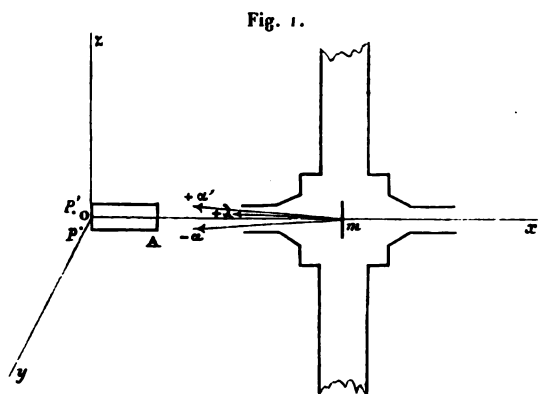
axe dépend d'ailleurs de la nature du tube de la lunette et du système de lentilles, suivant une loi que les équations du n° 12 mettent assez en évidence.

DEUXIÈME PARTIE.

Les inégalités des tourillons d'une lunette méridienne et les flexions de l'axe de rotation exercent sur les observations astronomiques, quelles que soient d'ailleurs les flexions du tube optique, une influence dont il faut tenir compte, ou qu'il faut éliminer par une disposition spéciale. Nous commencerons donc cette deuxième Partie par l'étude de la rotation de la lunette.

§ I — *Rotation de la lunette méridienne.*

1. Pour étudier le mouvement de rotation de la lunette méridienne, imaginons que la disposition suivante soit remplie :



Les deux tourillons de la lunette sont entièrement percés. Un collimateur fixe A est dirigé suivant leur axe et muni d'un oculaire nadiral. Un miroir plan *m* est fixé vers le centre du cube aussi perpendiculairement que possible à l'axe de rotation.

Le micromètre du collimateur, situé dans son plan focal principal,

se compose de deux fils fixes rectangulaires, l'un horizontal, l'autre vertical, que nous prendrons pour les axes oy et oz , et de deux fils mobiles parallèlement aux premiers au moyen de vis micrométriques. Un tambour indique la marche de chaque vis dont le pas p répond à un angle ε déterminé préalablement, et satisfait à la relation $p = \frac{n}{R} \varepsilon$, qui donne la constante $\frac{n}{R}$ du collimateur (*).

Le micromètre étant éclairé par une lumière qui tombe sur l'oculaire nadiral, un point quelconque p des fils fixes peut être considéré comme un point lumineux qui donne naissance à un faisceau parallèle émergent du collimateur. Ce faisceau se réfléchit sur le miroir m , et donne naissance, dans le plan focal du collimateur, à une image p' du point p . On prendra la position de cette image au moyen des fils mobiles. Cette position variera avec la hauteur de la lunette, et de ses variations on pourra conclure le mouvement de l'axe du miroir.

Supposons encore qu'un cercle de distances polaires ou zénithales, grossièrement divisé, est monté sur l'axe de rotation de la lunette.

2. Prenons pour axe ox la direction du faisceau parallèle qui fait son image à l'origine o des coordonnées; les constantes ω, ϖ du collimateur seront nulles (première Partie, n° 11). Soient, pour une distance zénithale θ de la lunette, λ, μ, ν les cosinus des angles de l'axe du miroir, ou de la normale du côté poli, avec ox, oy, oz ; α, β, γ ; α', β', γ' les quantités analogues pour le faisceau émergent du collimateur et pour le faisceau réfléchi; (y, z) le point du micromètre fixe répondant au faisceau émergent, et (y', z') l'image de ce point.

Si l'on se reporte aux formules du n° 1 (première Partie), on voit que, pour passer du cas de la réfraction à celui de la réflexion, il faut faire $l = 1, m = 2$; ce qui donne

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha' = \alpha + 2\lambda, \\ \beta' = \beta + 2\mu, \\ \gamma' = \gamma + 2\nu. \end{cases}$$

(*) Cette constante peut d'ailleurs, pour tout instrument d'optique, s'obtenir par divers procédés très-précis; nous la considérerons donc comme connue (voir *Astronomie physique* de Biot; Chapitre des *instruments d'optique*).

Les points (y, z) , (y', z') n'étant autre chose que les images des faisceaux parallèles, définis respectivement par $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ et α' , β' , γ' , on a, par les formules (18) [première Partie],

$$y = \frac{n}{R} \beta, \quad z = \frac{n}{R} \gamma,$$

$$y' = -\frac{n}{R} \beta', \quad z' = -\frac{n}{R} \gamma';$$

d'où

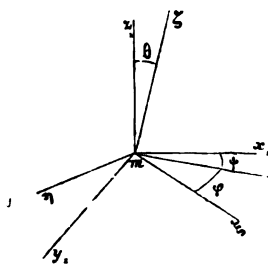
$$(2) \quad \frac{1}{2}(y + y') = -\frac{n}{R} \mu, \quad \frac{1}{2}(z + z') = -\frac{n}{R} \nu.$$

$(y + y')$, $(z + z')$ se mesurent au micromètre, et les formules (2) donnent μ et ν pour les diverses valeurs de θ . On prendra naturellement dans le micromètre le point o pour le point (y, z) , et l'on aura $y = 0$, $z = 0$ dans les formules (2), qui deviendront

$$\frac{1}{2}y' = -\frac{n}{R} \mu, \quad \frac{1}{2}z' = -\frac{n}{R} \nu.$$

3. Imaginons, par un point m du miroir, trois axes mx_1 , my_1 , mz_1 , de direction constante, parallèles à ox , oy , oz , et trois autres axes

Fig. 2.



rectangulaires $m\xi$, $m\eta$, $m\zeta$, liés au miroir, $m\xi$ étant l'axe prolongé du miroir, et $m\zeta$ dirigé dans le sens du tube de la lunette. Les variations de l'angle $z, m\zeta$ seront suffisamment représentées par celles de θ lues sur le cercle des distances zénithales.

Appelons ψ et φ les angles que fait, avec mx_1 , et $m\xi$, l'intersection des deux plans x_1y_1 , et $\xi\eta$; $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu$; λ' , μ' , ν' ; λ'' , μ'' , ν'' étant les cosinus des angles de $m\xi$, $m\eta$, $m\zeta$ avec les axes de direction con-

stante, nous aurons, par les formules d'Euler,

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\lambda = \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta, \\ -\mu = \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \theta, \\ -\nu = \sin \varphi \sin \theta; \\ \lambda' = -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \theta, \\ \mu' = -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \theta, \\ \nu' = \cos \varphi \sin \theta; \\ \lambda'' = \sin \psi \sin \theta, \\ \mu'' = -\cos \psi \sin \theta, \\ \nu'' = \cos \theta. \end{array} \right.$$

Connaissant θ , μ , ν , on connaît φ , ψ , et par suite le mouvement des trois axes liés au miroir.

4. Proposons-nous, par exemple, en vue de ce qui suit, de calculer les variations de l'inclinaison de $m\zeta$ sur mx , ou sur ox .

On a, par la seconde des formules (3), en négligeant le troisième ordre relativement à φ , ψ , qui sont de l'ordre de μ , ν ,

$$\sin \psi = \nu \cot \theta - \mu,$$

et par suite

$$\lambda'' = \nu \cos \theta - \mu \sin \theta.$$

Connaissant λ'' pour chaque valeur de θ , on formera sa valeur moyenne λ''_m , et si l'on pose

$$\lambda'' = \lambda''_m + \Delta \lambda''_m,$$

on pourra regarder comme connue la quantité $\Delta \lambda''_m$, qui varie lorsque l'on passe de la distance zénithale θ à la distance $\theta + \delta\theta$.

5. *Remarques.* — 1° Considérons, dans le plan du micromètre du collimateur, le point p ayant pour coordonnées $-\frac{n}{R}\mu$, $-\frac{n}{R}\nu$. Le centre de gravité des points p sera

$$y = -\frac{n}{R} \Sigma \mu, \quad z = -\frac{n}{R} \Sigma \nu.$$

Supposons maintenant que l'on change un peu l'orientation initiale

du miroir m , et que λ, μ, ν soient alors désignés par λ_1, μ_1, ν_1 ; représentons par a, b, c les cosinus des angles du nouvel axe du miroir avec les anciens axes $m\xi, m\eta, m\zeta$, b et c étant par hypothèse de petites quantités et a voisin de -1 .

On aura évidemment, a, b, c étant constants pour toute valeur de θ ,

$$\Sigma \mu_1 = -a \Sigma \mu + b \Sigma \mu' + c \Sigma \mu'',$$

$$\Sigma \nu_1 = -a \Sigma \nu + b \Sigma \nu' + c \Sigma \nu''.$$

Or, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$\mu' = \cos \theta, \quad \mu'' = -\sin \theta, \quad a = -1;$$

donc

$$\Sigma \mu_1 = \Sigma \mu + b \Sigma \cos \theta - c \Sigma \sin \theta.$$

Si les observations ont été faites en divisant par parties égales la rotation complète de la lunette, $\Sigma \cos \theta, \Sigma \sin \theta$ seront nuls, et l'on aura

$$\Sigma \mu_1 = \Sigma \mu,$$

et, pour les mêmes raisons,

$$\Sigma \nu_1 = \Sigma \nu.$$

Le centre de gravité des points p est donc indépendant des petites différences que peut présenter à l'intérieur du cube l'orientation initiale du miroir dans deux études distinctes de la rotation de la lunette.

2° Remarquons encore que, si une droite liée invariablement aux axes $m\xi, m\eta, m\zeta$, est très-voisine de $m\zeta$, on aura, pour le cosinus a de l'angle de cette droite avec ox ,

$$(4) \quad a = \alpha + \lambda'',$$

en négligeant le second ordre, et en appelant α le cosinus de l'angle de cette droite avec $m\xi$; par suite on pourra prendre $\partial \lambda''$ pour ∂a , puisque α est constant.

§ II. — Flexion de la lunette méridienne.

Après avoir ainsi rapporté à des axes fixes ox, oy, oz les axes $m\xi, m\eta, m\zeta$, quelles que soient les inégalités des tourillons et les flexions de l'axe de rotation, dont l'étude a été jusqu'ici inutile, passons au

système de lentilles portées par le tube de la lunette, et rapportons-le aux axes $m\xi$, $m\eta$, $m\zeta$, dont le mouvement dans l'espace est actuellement connu.

6. *Flexion astronomique du tube déterminée à toutes les hauteurs.* —

La lunette ayant la distance zénithale θ , supposons qu'un miroir plan soit vissé à la suite de l'objectif sur le même barillet, et que de petites masses additionnelles, d'un poids total égal à celui du miroir, symétriquement disposées sur la circonférence du barillet, aient été enlevées immédiatement après le vissage du miroir, en sorte que la flexion soit la même dans les deux cas.

Un point du micromètre éclairé par une lumière incidente sur l'oculaire nadiral de la lunette donnera naissance à un faisceau parallèle émergent de la lunette, se réfléchissant sur le miroir et donnant l'image du point considéré dans le plan même du micromètre.

Soient α , β , γ ; α' , β' , γ' ; λ' , μ' , ν' les cosinus des angles avec les axes $m\xi$, $m\eta$, $m\zeta$ de la direction du faisceau émergent, du faisceau réfléchi, de l'axe du miroir; et ξ_0 , η_0 ; ξ'_0 , η'_0 les coordonnées du point du micromètre et de son image. On aura, pour la distance zénithale θ , les constantes R , n , ω , ϖ se rapportant à la lunette,

$$\begin{aligned}\xi_0 &= \frac{n}{R} \left(\alpha - \frac{\omega}{n} \right), & \eta_0 &= \frac{n}{R} \left(\beta - \frac{\varpi}{n} \right), \\ \xi'_0 &= -\frac{n}{R} \left(\alpha' + \frac{\omega}{n} \right), & \eta'_0 &= -\frac{n}{R} \left(\beta' + \frac{\varpi}{n} \right);\end{aligned}$$

d'où, à cause des relations (1),

$$\begin{aligned}\xi_0 + \xi'_0 &= -2 \frac{n}{R} \left(\lambda' + \frac{\omega}{n} \right), \\ \eta_0 + \eta'_0 &= -2 \frac{n}{R} \left(\mu' + \frac{\varpi}{n} \right).\end{aligned}$$

Si θ varie de $\delta\theta$, on a, en différentiant ces formules et éliminant $\delta\omega$, $\delta\varpi$ au moyen des relations (22) [première Partie],

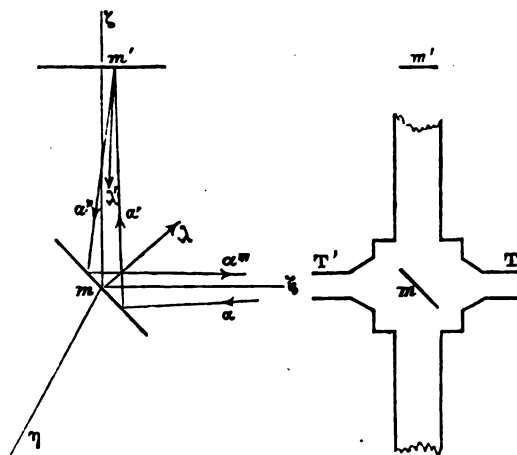
$$(5) \quad \begin{cases} \delta(\xi'_0 - \xi_0) = -2 \frac{n}{R} (\delta\lambda' + \delta\alpha), \\ \delta(\eta'_0 - \eta_0) = -2 \frac{n}{R} (\delta\mu' + \delta\beta). \end{cases}$$

Or $\delta(\xi'_0 - \xi_0)$, $\delta(\eta'_0 - \eta_0)$ se mesurent au micromètre de la lunette, au moyen de ses fils mobiles, en toute rigueur si ces fils rectangulaires sont parallèles aux axes $m\xi$, $m\eta$, mais avec une approximation suffisante dans tous les cas, car ce parallélisme est toujours assez bien rempli pour la mesure de différences de coordonnées.

Les formules (5) montrent que la recherche des flexions astronomiques $\delta\alpha$, $\delta\beta$ est ramenée à celle de $\delta\lambda'$, $\delta\mu'$, c'est-à-dire de la variation d'inclinaison du miroir employé ou de tout autre peu incliné sur lui et vissé à la même place.

7. *Détermination de $\delta\lambda'$ et $\delta\mu'$.* — Faisons tourner le miroir m de 135 degrés environ autour de $m\eta$, remplaçons l'objectif et son barillet par un miroir de même poids m' et vissé sur le tube à la même place.

Fig. 3.



La flexion ne sera pas altérée par cette substitution.

Disposons, dans l'ouverture du tourillon T, un microscope muni d'un micromètre à son plan focal principal, et d'un oculaire nadiral sur lequel tombe un faisceau de lumière.

Soient η_0 , ξ_0 les coordonnées d'un point du micromètre du microscope; α , β , γ ; α' , β' , γ' ; α'' , β'' , γ'' ; α''' , β''' , γ''' les cosinus des angles que font avec les axes $m\xi$, $m\eta$, $m\zeta$ les directions du faisceau parallèle sortant du microscope, se réfléchissant sur le miroir m , le miroir m' , le

miroir m , et rentrant dans le microscope pour y former l'image (η'_0, ζ'_0) du point (η_0, ζ_0) .

Soient encore $\lambda, \mu, \nu; \lambda', \mu', \nu'$ les cosinus relatifs aux directions des axes des miroirs m et m' .

On aura

$$\alpha' = \alpha + q\lambda,$$

$$\beta' = \beta + q\mu,$$

$$\gamma' = \gamma + q\nu,$$

et de même

$$\alpha'' = \alpha' + q'\lambda', \quad \alpha''' = \alpha'' + q''\lambda,$$

$$\beta'' = \beta' + q'\mu', \quad \beta''' = \beta'' + q''\mu,$$

$$\gamma'' = \gamma' + q'\nu', \quad \gamma''' = \gamma'' + q''\nu,$$

avec

$$q = -2(\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma),$$

$$q' = -2(\lambda'\alpha' + \mu'\beta' + \nu'\gamma'),$$

$$q'' = -2(\lambda\alpha'' + \mu\beta'' + \nu\gamma'').$$

Il résulte de là

$$\alpha''' = \alpha + q'\lambda' + (q + q'')\lambda,$$

$$\beta''' = \beta + q'\mu' + (q + q'')\mu,$$

$$\gamma''' = \gamma + q'\nu' + (q + q'')\nu,$$

ou, en négligeant les quantités du second ordre,

$$\alpha''' = -\alpha + 2\lambda' + (q + q'')\lambda,$$

$$\beta''' = \beta + 2\mu' + (q + q'')\mu,$$

$$\gamma''' = \gamma - 2 + (q + q'')\nu;$$

d'où l'on tire, pour les variations qui auront lieu lorsque la lunette passera de la distance zénithale θ à la distance $\theta + \delta\theta$,

$$0 = 2\delta\lambda' + \lambda\delta(q + q''),$$

$$\delta\beta''' = \delta\beta + 2\delta\mu' + \mu\delta(q + q''),$$

$$\delta\gamma''' = \delta\gamma + \nu\delta(q + q'').$$

Éliminant entre ces relations $\delta(q + q'')$, il vient

$$\delta\lambda' = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\nu} (\delta\gamma - \delta\gamma'''),$$

$$\delta\mu' = \frac{1}{2} \frac{\mu}{\nu} (\delta\gamma - \delta\gamma''') - \frac{1}{2} (\delta\beta - \delta\beta''').$$

Si l'on admet que le miroir m ait son axe assez voisin de la bissectrice des axes ξ, ζ pour qu'on puisse sans erreur sensible remplacer $\frac{\lambda}{\nu}$ par 1 et $\frac{\mu}{\nu}$ par 0, on aura

$$(6) \quad \begin{cases} \delta\lambda' = \frac{1}{2} (\delta\gamma - \delta\gamma'''), \\ \delta\mu' = -\frac{1}{2} (\delta\beta - \delta\beta'''). \end{cases}$$

Cela posé, le point (η_0, ζ_0) et le point (η'_0, ζ'_0) pouvant être considérés comme les images provenant de *faisceaux parallèles* dont les directions correspondent aux cosinus $-\alpha, -\beta, -\gamma$, et $\alpha'', \beta''', \gamma'''$, on aura

$$\eta_0 = + \frac{n}{R} \left(\beta - \frac{\omega}{n} \right),$$

$$\zeta_0 = + \frac{n}{R} \left(\gamma - \frac{\varpi}{n} \right),$$

et

$$\eta'_0 = - \frac{n}{R} \left(\beta''' + \frac{\omega}{n} \right),$$

$$\zeta'_0 = - \frac{n}{R} \left(\gamma''' + \frac{\varpi}{n} \right),$$

lorsque la lunette a la position définie par θ ; ω, ϖ, n, R ayant leur sens habituel appliqué au microscope T. Les deux premières de ces quantités dépendent de θ , les deux autres sont constantes. On conclut de là

$$(7) \quad \begin{cases} \eta'_0 - \eta_0 = \frac{n}{R} (\beta - \beta''') - 2 \frac{\omega}{R} - 2\eta_0, \\ \zeta'_0 - \zeta_0 = \frac{n}{R} (\gamma - \gamma''') - 2 \frac{\varpi}{R} - 2\zeta_0, \end{cases}$$

et, lorsque la distance zénithale devient $\theta + \delta\theta$, on a

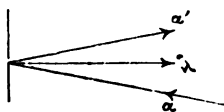
$$(8) \quad \begin{cases} \delta(\eta_0 - \eta'_0) = + \frac{2n}{R} \delta\mu' + 2 \left(\frac{\partial\omega}{R} + \delta\eta_0 \right), \\ \delta(\zeta_0 - \zeta'_0) = - \frac{2n}{R} \delta\lambda' + 2 \left(\frac{\partial\varpi}{R} + \delta\zeta_0 \right). \end{cases}$$

Les fils rectangulaires mobiles du micromètre étant suffisamment parallèles aux axes η , ζ , donneront les premiers membres des relations (7). Si le tourillon T était inflexible par rapport au centre du cube ou aux axes ξ , η , ζ , on voit que $\partial\omega$, $\partial\varpi$, $\delta\eta_0$, $\delta\zeta_0$ seraient nuls, et les relations (7) donneraient immédiatement $\delta\mu'$, $\delta\lambda'$.

Généralement, les flexions de l'axe de rotation seront du second ordre ou négligeables devant celles du tube; mais, sans admettre cette hypothèse, nous pouvons déterminer $\left(\frac{\partial\omega}{R} + \delta\eta_0 \right)$, $\left(\frac{\partial\varpi}{R} + \delta\zeta_0 \right)$ de la manière suivante.

8. *Détermination de la flexion de l'axe de rotation.* — Tournons le miroir m de 180 degrés autour de $m\eta$, à partir de la position qu'il avait pour l'étude du mouvement de rotation de la lunette, ou mieux des axes

Fig. 4.



ξ , η , ζ , et ne changeons rien à la disposition du microscope du tourillon T. On aura, en conservant les notations précédentes, pour l'image (η'_1, ζ'_1) du point (η_1, ζ_1) du micromètre, les équations (7), où l'on remplacera seulement β'' , γ'' par β' , γ' , savoir

$$\begin{aligned} \eta'_1 - \eta_1 &= \frac{n}{R} (\beta - \beta') - 2 \left(\frac{\omega}{R} + \eta_1 \right), \\ \zeta'_1 - \zeta_1 &= \frac{n}{R} (\gamma - \gamma') - 2 \left(\frac{\varpi}{R} + \zeta_1 \right), \end{aligned}$$

avec

$$\beta' = \beta + q\mu, \quad \gamma' = \gamma + q\nu, \quad q = 2;$$

de sorte que, lorsque la lunette prendra la position $\theta + \delta\theta$, on aura, en remarquant que μ et ν sont invariables,

$$\delta(\beta' - \beta) = 0, \quad \delta(\gamma' - \gamma) = 0,$$

et, par suite, à cause de $\delta\eta_1 = \delta\eta_0$, $\delta\zeta_1 = \delta\zeta_0$,

$$(9) \quad \begin{cases} \delta(\eta'_1 - \eta_1) = -2 \left(\frac{\partial\omega}{R} + \delta\eta_0 \right), \\ \delta(\zeta'_1 - \zeta_1) = -2 \left(\frac{\partial\varpi}{R} + \delta\zeta_0 \right). \end{cases}$$

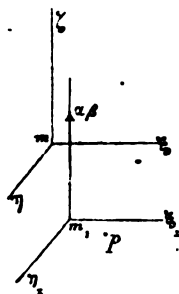
Les premiers membres de (9) sont donnés par les mesures micrométriques faites au microscope T; on les substituera aux seconds membres, dans les équations (8), s'ils ne sont pas négligeables. Les valeurs de $\delta\lambda'$, $\delta\mu'$ tirées de (8) seront portées dans (5), qui fourniront $\delta\alpha$, $\delta\beta$.

§ III. — *Observations astronomiques rapportées aux axes fixes ox , oy , oz .*

9. Ces quantités $\delta\alpha$, $\delta\beta$ étant connues expérimentalement pour un certain nombre de distances zénithales de la lunette et par interpolation pour les distances intermédiaires, il sera possible de ramener toutes les observations astronomiques à ce qu'elles seraient si le tube optique de la lunette était inflexible.

Soient m, ξ_1 , m, η_1 les fils d'ascension droite et de déclinaison du

Fig. 5.



micromètre du tube de la lunette. Ils sont sensiblement parallèles à

$m\xi, m\eta$. Soient α, β les cosinus de l'inclinaison sur ces derniers axes, du faisceau incident parallèle dont l'image se fait en m_1 , pour la distance zénithale θ de la lunette. Nommons *axe optique de la lunette* cette direction (α, β) , variable avec θ .

Tout faisceau incident parallèle, qui, pour la même valeur de θ , aura son image au point p de coordonnées ξ_1, η_1 , fera, avec $m\xi, m\eta$, des angles dont les cosinus seront

$$\alpha - \frac{R}{n} \xi_1, \quad \beta - \frac{R}{n} \eta_1,$$

$\frac{R}{n}$ étant l'inverse de la constante connue $\frac{n}{R}$ de la lunette.

La valeur de θ variant de 0 à 360, α et β éprouveront, en raison des flexions du tube, des variations $\delta\alpha, \delta\beta$ que nous venons de mesurer.

Soient α_m, β_m les valeurs moyennes actuellement inconnues de α et β , et $\Delta\alpha_m, \Delta\beta_m$ les différences $\alpha - \alpha_m, \beta - \beta_m$, variables avec θ .

$\Delta\alpha_m, \Delta\beta_m$ résultent simplement de $\delta\alpha, \delta\beta$, et peuvent être regardées comme connues. On aura ainsi

$$\alpha = \alpha_m + \Delta\alpha_m,$$

$$\beta = \beta_m + \Delta\beta_m.$$

Si l'on connaissait α_m, β_m , on aurait donc α, β , quel que soit θ , et par suite la direction de l'astre, dont l'image est en p , rapportée aux axes m .

10. Mais ce n'est pas aux axes mobiles m qu'il s'agit de rapporter la direction des astres; c'est aux axes fixes ox, oy, oz du collimateur A, dont la situation à l'égard du méridien sera déterminée ultérieurement. Occupons-nous d'abord de l'*ascension droite*.

Soit a le cosinus de l'inclinaison de l'axe optique sur ox ; a variera avec θ pour deux raisons : la flexion du tube relative aux axes m et l'inégalité d'inclinaison de ces axes sur ox lorsque la lunette tourne. Soit a_m la valeur moyenne de a , et

$$a = a_m + \Delta a_m,$$

Δa_m se composera donc de deux parties : une première, due à la flexion

du tube et sensiblement égale à $\Delta\alpha_m$, puisque $m\xi$ est peu incliné sur ox ; une seconde, due au mouvement des axes m et sensiblement égale à $\Delta\lambda'_m$, déterminé n° 4, puisque l'axe optique est peu incliné sur $m\xi$.

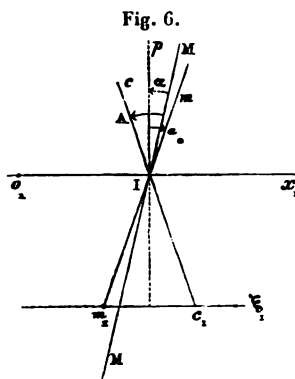
On a ainsi

$$\Delta a_m = \Delta\alpha_m + \Delta\lambda'_m.$$

Δa_m est donc connu pour toute valeur de θ . Il suffirait d'avoir a_m , ou la *collimation moyenne*, pour avoir a , ou la *collimation correspondante à la distance zénithale* θ .

11. *Mesure de la collimation moyenne.* — Deux collimateurs sont disposés, l'un au nord, l'autre au sud de la lunette méridienne, et réglés l'un sur l'autre de telle sorte que leurs axes optiques coïncident. Soit cc , leur direction commune.

Supposons d'abord la lunette dirigée sur le collimateur nord, et soit c , l'image de la croisée des fils de ce collimateur. L'angle ω_0 de la



direction c, c et de l'axe optique m, m de la lunette est mesuré au micromètre de cette dernière par m, c_1 . Menons par le point de rencontre I de ces deux directions o, x , et pI respectivement parallèle et perpendiculaire à ox , et aussi IM parallèle à la méridienne. Désignons par a_0 la collimation horizontale nord, par A et α l'azimut des collimateurs et de ox ; nous avons, en tenant compte des signes qu'il est d'usage d'attribuer à ces quantités,

$$A - \alpha - a_0 = \omega_0,$$

d'ailleurs

$$a_0 = a_m + \Delta_0 a_m;$$

d'où

$$A - \alpha = a_m + \Delta_0 a_m + \omega_0.$$

On trouvera de même, par un pointé sur le collimateur sud, $\Delta_0 a_m$, ω_0 étant devenus $A_1 a_m$ et ω_1 , tandis que A , α restent invariables,

$$A - \alpha = -a_m - \Delta_1 a_m + \omega_1;$$

d'où

$$(10) \quad a_m = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_0) - \frac{1}{2}(\Delta_0 a_m + \Delta_1 a_m),$$

$$(11) \quad A - \alpha = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_0) + \frac{1}{2}(\Delta_0 a_m - \Delta_1 a_m).$$

Les seconds membres de (10) et (11) étant donnés par l'observation, a_m et en outre $A - \alpha$ sont connus.

12. *Inclinaison et azimut de l'axe ox .* — Nous connaissons actuellement l'inclinaison de l'axe optique sur ox pour une valeur quelconque de θ . Pour conclure du passage d'un astre au point $p(\eta_1, \xi_1)$ l'époque de son passage au méridien, il ne reste donc plus qu'à connaître la position de ox relativement au méridien, c'est-à-dire son inclinaison et son azimut.

Inclinaison. — L'axe ox n'est autre chose que l'axe optique du collimateur fixe A, au moyen duquel nous avons étudié la rotation de la lunette.

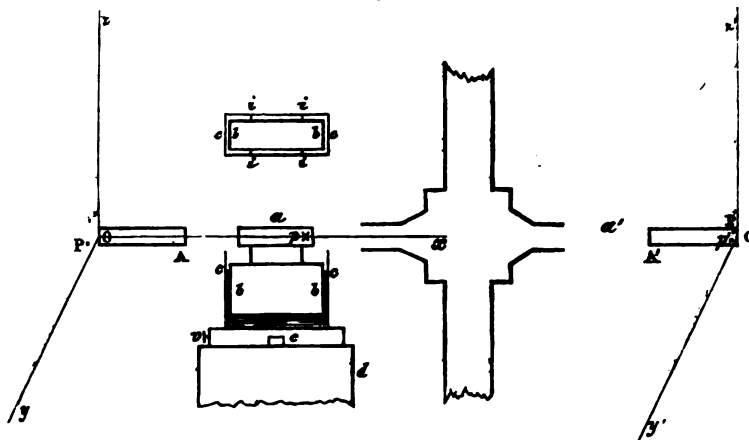
Imaginons un collimateur a , surmontant à peu de distance une base plus large et très-allongée bb , aussi lourde que possible, pour des dimensions données, et plongeant d'une certaine quantité dans le mercure du vase cc . Supposons que le fond de ce vase puisse tourner librement sur lui-même autour de l'axe e du pied d , qui supporte tout l'appareil, installé à poste fixe, comme le collimateur A; soit v une vis de rappel pour régler cette rotation. Supposons, en outre, que, par un moyen quelconque, soit par un piston agissant sur le mercure, soit par un glissement vertical du pied d dans un étui muni de vis de pression, on puisse élever ou abaisser le collimateur a de tout le diamètre du collimateur A.

Disposons un second collimateur fixe A' symétrique de A par rapport à la lunette. Cela posé, faisons les opérations suivantes :

1° Les objectifs de a et A étant en présence et a en équilibre, le

croisement p du réticule de a , convenablement éclairé, fait son image en P dans le plan du réticule de A . On fera sur P , avec le fil horizontal mobile parallèle à oy , et le fil vertical mobile parallèle à oz , un nombre

Fig. 6.



suffisant de pointés dont on prendra la moyenne, pour chaque fil, que l'on fixera ensuite dans cette position moyenne.

2° On fera tourner le vase c autour de son axe, aussi lentement qu'on voudra, au moyen de la vis v , d'un angle de 180 degrés, mesuré sur une graduation adaptée au pied d .

3° Le collimateur A' ayant été mis préalablement dans le prolongement du collimateur A , l'image de p se fera en un point p' de A' . On fera sur p' un nombre suffisant de pointés avec le fil horizontal mobile parallèle à oy' .

4° On abaissera le collimateur a , de manière que l'image du point P vienne se faire librement en P' , que l'on pointera le même nombre de fois.

La distance angulaire $P'p'$ mesurée au collimateur A' est le double de l'inclinaison de l'axe optique, relatif au point P , du collimateur de A .

La valeur du tour de vis de A et les pointés faits sur P permettent de passer de cette inclinaison à celle de l'axe optique relatif à o ou de ox .

Ce qui précède suppose que les fils des collimateurs fixes parallèles à oy , oy' sont horizontaux. On s'assurera qu'il en est ainsi en don-

nant au collimateur a , au moyen de la vis à mouvement lent v , deux positions successives telles, que les images correspondantes de p soient aux extrémités du champ du collimateur A ou A' . Si les pointés faits sur ces deux images ont même moyenne, le fil oy ou $o'y'$ est suffisamment horizontal; si l'on trouve une différence entre les moyennes, on fera tourner le micromètre sur lui-même jusqu'à ce qu'elle disparaisse. Il y a même là un procédé précis pour mesurer l'inclinaison d'un fil sur l'horizon par la différence des pointés correspondant aux images extrêmes de p . Je crois qu'il pourrait s'appliquer aux fils de déclinaison de la lunette méridienne, et remplacer avec avantage la comparaison des pointés sur une même étoile à son entrée et à sa sortie du champ.

On disposera intérieurement au vase cc , et perpendiculairement à ses grandes faces, de petites pointes i, i , très-déliées et de même longueur, qui éteindront immédiatement les faibles oscillations de la base bb du collimateur a , après une rotation du vase. Il est évident d'ailleurs que les petites variations d'azimut qui pourront se produire dans la position de a , d'un nivellement à l'autre, sont sans influence sur la mesure de l'inclinaison.

Comme vérification, on remarquera que l'image de oy dans A' doit être parallèle à $o'y'$.

Azimut. — La détermination de l'azimut α n'offre rien de particulier dans cette théorie; elle se fera, comme à l'ordinaire, par les passages d'étoiles circompolaires. Il faudra seulement avoir le soin essentiel de remplacer partout, dans les formules usuelles, la collimation par $a_m + \partial a_m$, δa_m se rapportant à la distance zénithale de l'étoile observée: α connu, (11) donnera A .

13. *Flexion en distance polaire.* — Pour tenir compte de l'effet de la flexion du tube de la lunette sur les distances polaires, il faudra corriger les observations de la quantité $\partial \beta_m$, que nous avons déterminée précédemment pour toutes les distances zénithales. Les flexions de l'axe de rotation n'ont pas d'influence sensible. Quant aux flexions du cercle divisé sur lequel se lisent les distances polaires, nous n'avons pas à nous en occuper ici.


14. Terminons cette étude en remarquant que, si la lunette se re-

tourne, on peut, pour chaque position, effectuer les opérations que nous avons indiquées. La comparaison des résultats obtenus fournira des vérifications utiles, qu'il ne faudra jamais négliger, et dont on pourrait encore augmenter le nombre, en installant un second collimateur mobile α' , symétrique de α par rapport à la lunette. Comme vérification qui n'exige pas le retournement de la lunette, citons celle-ci : Les deux microscopes collimateurs étant disposés dans leurs tourillons respectifs, l'image du réticule de l'un se fait dans le plan du réticule de l'autre. Si l'on fait tourner la lunette, l'observation de cette image donne la flexion du premier tourillon rapportée au second. Cette flexion doit être la somme des flexions individuelles de chaque tourillon obtenues comme nous l'avons dit, et conséquemment le double de chacune d'elles dans le cas où elles seraient égales.

Les méthodes exposées ne supposent que l'emploi du miroir plan et de l'oculaire nadiral. Un tel oculaire est d'un emploi universel, et son mode d'éclairage, variable avec les circonstances d'installation, ne présentera jamais de difficulté qui ne puisse être vaincue facilement. Quant au miroir plan, sa perfection est assez rare; mais elle n'est pas sans exemple, quoique les physiciens, si l'on en excepte Foucault, et les constructeurs, s'en soient assez peu occupés (*).

Nous regrettons de ne pouvoir faire suivre notre théorie d'une application numérique, pour laquelle nous manquons absolument de tout le matériel nécessaire. Aussi, dans nos formules, avons-nous cru inutile d'exprimer en angle les coordonnées micrométriques de certains points images, au moyen du nombre des tours de la vis employée et de la valeur d'un tour.

(*) Nous apprenons que M. Martin espère aujourd'hui pouvoir construire de bons miroirs plans, ayant jusqu'à 80 centimètres de diamètre.



DÉVELOPPEMENTS

SUR

CERTAINES SÉRIES DE POLYNOMES

A UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES,

PAR M. F. DIDON,

CHARGÉ DE COURS A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE RENNES.

On doit à M. Hermite la découverte de deux séries de polynômes à deux variables $U_{m,n}$ et $V_{m,n}$, qui jouissent de la propriété suivante : « Quelles que soient les valeurs entières et positives de m, n, m', n' , et pourvu que m et n ne soient pas en même temps égaux à m' et n' , on a

$$\iint U_{m,n} V_{m',n'} dx dy = 0,$$

les variables étant limitées dans l'intégration par la condition

$$x^2 + y^2 \leq 1. »$$

Ce système de séries associées n'est pas unique, et, dans ce travail, on trouvera la preuve de l'existence d'une infinité de systèmes analogues, et une manière d'en former autant qu'on en voudra. Parmi tous ces systèmes, il en est un qui se distingue des autres par cette circonstance, que les deux séries qui le constituent sont identiques. En réalité, il y a un second système semblable, mais qui n'est pas, à proprement parler, distinct du premier. Ainsi, dans ce cas, en désignant

l'élément général de chacune des deux séries, actuellement les mêmes, par $P_{m,n}$, on aura

$$\iint P_{m,n} P_{m',n'} dx dy = 0,$$

où l'on suppose que $(m - m')^2 + (n - n')^2$ n'est pas nul. Ces fonctions $P_{m,n}$ présentent la plus grande analogie avec les fonctions X_n de Legendre, et, en particulier, elles permettent de réaliser un certain mode d'approximation des fonctions quelconques de deux variables, au moyen de polynômes entiers, par rapport à ces mêmes variables. Plus généralement, j'indique une série de polynômes $P_{m,n}$ satisfaisant à la condition

$$\iint P_{m,n} P_{m',n'} f(x, y) dx dy = 0,$$

quand l'on n'a pas en même temps $m = m'$, $n = n'$. L'intégration pourra être faite ici dans l'intérieur d'un contour quelconque. Les rapports de ces dernières fonctions avec l'intégrale $\iint \frac{f(z, z') dz dz'}{(x - z)(y - z')}$ donnent, à un certain point de vue, une généralisation de la théorie de l'intégrale $\int_a^b \frac{f(z) dz}{x - z}$. Enfin j'ajouterai que l'extension des résultats précédents, au cas d'un nombre quelconque de variables, se fait avec la plus grande facilité.

I.

La fonction

$$P_{m,n} = k_{m,n} \frac{1}{(y^2 - 1)^{m+\frac{1}{2}}} \frac{d^n (y^2 - 1)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n} \frac{d^m (x^2 + y^2 - 1)^m}{dx^m},$$

dans laquelle $k_{m,n}$ désigne une constante, est un polynôme du degré $m + n$, dans lequel l'exposant de x ne surpasse pas m . Si l'on se propose le calcul de l'intégrale

$$\iint P_{m,n} P_{m',n'} dx dy$$

prise dans l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 = 1$, on est d'abord conduit à chercher la valeur de

$$\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} \frac{d^m (x^2 + y^2 - 1)^m}{dx^m} \frac{d^{m'} (x^2 + y^2 - 1)^{m'}}{dx^{m'}} dx.$$

Cette expression, par le changement de variables $x = \sqrt{1-y^2}z$, devient

$$(1-y^2)^{\frac{m+m'+1}{2}} \int_{-1}^{+1} \frac{d^m(z^2-1)^m}{dz^m} \frac{d^{m'}(z^2-1)^{m'}}{dz^{m'}} dz,$$

ou bien

$$m!m'! 2^{m+m'} (1-y^2)^{\frac{m+m'+1}{2}} \int_{-1}^{+1} X_m X_{m'} dx,$$

X_m désignant ici la fonction de Legendre; et, par conséquent, nulle, si m et m' sont différents, elle est égale, dans le cas de $m' = m$, à

$$\frac{m!m! 2^{m+1}}{2m+1} (1-y^2)^{m+\frac{1}{2}}.$$

Ainsi donc, quand on a $m \leq m'$, l'intégrale $\iint P_{m,n} P_{m',n'} dx dy$ est nulle, et si $m = m'$,

$$\begin{aligned} \iint P_{m,n} P_{m,n'} dx dy &= \frac{m!m! 2^{m+1}}{2m+1} k_{m,n} k_{m,n'} (-1)^{m+\frac{1}{2}} \\ &\times \int_{-1}^{+1} \frac{1}{(y^2-1)^{m+\frac{1}{2}}} \frac{d^n(y^2-1)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n} \frac{d^{n'}(y^2-1)^{m+n'+\frac{1}{2}}}{dy^{n'}} dy. \end{aligned}$$

Supposons que n et n' soient différents, et, par exemple, que n' soit plus petit que n . L'intégrale définie du second membre de l'égalité précédente, pouvant s'écrire

$$(-1)^n \int_{-1}^{+1} (y^2-1)^{m+n+\frac{1}{2}} \frac{d^n}{dy^n} \left[\frac{1}{(y^2-1)^{m+\frac{1}{2}}} \frac{d^{n'}(y^2-1)^{m+n'+\frac{1}{2}}}{dy^{n'}} \right] dy,$$

est manifestement nulle; si au contraire $n' = n$, sa valeur est représentée par

$$\begin{aligned} &(-1)^n n! (2m+n+2)(2m+n+3)\dots(2m+2n+1) \int_{-1}^{+1} (y^2-1)^{m+n+\frac{1}{2}} dy \\ &= (-1)^{m+\frac{1}{2}} \pi n! \frac{1.3.5\dots(2m+2n+1)}{2.4.6\dots(2m+2n+2)} (2m+n+2)(2m+n+3)\dots(2m+2n+1). \end{aligned}$$

Ainsi l'on a

$$\iint P_{m,n} P_{m',n'} dx dy = 0,$$

quand m et n ne sont pas simultanément égaux à m' et n' , et

$$\iint P_{m,n} P_{m,n} dx dy = \frac{2\pi k_{m,n}^2}{2m+1} 2^{2m} m! n! \frac{1.3.5... (2m+2n+1)}{2.4.6... (2m+2n+2)} (2m+n+2) \dots (2m+2n+1).$$

Si l'on fait

$$k_{m,n} = \frac{1}{m! n! 2^{m+n}},$$

il vient finalement

$$(1) \left\{ \iint P_{m,n} P_{m,n} dx dy = \frac{2\pi}{2m+1} \frac{(2m+n+2)(2m+n+3) \dots (2m+2n+1)}{n! 2^{2m+2n}} \frac{1.3.5 \dots (2m+2n+1)}{2.4.6 \dots (2m+2n+2)} \right\}.$$

Cherchons maintenant la fonction génératrice de ces polynômes $P_{m,n}$, c'est-à-dire

$$\sum_{m=0}^{m=+\infty} \sum_{n=0}^{n=+\infty} a^m b^n P_{m,n}.$$

En supposant d'abord m constant, on est conduit à faire la somme

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{b^n}{n! 2^n} \frac{d^n (y^2 - 1)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n}.$$

Elle s'effectue immédiatement avec le secours de la formule de Lagrange

$$F'(z) \frac{dz}{dy} = F'(y) + \frac{b}{1.2} \frac{d[F'(y)f(y)]}{dy} + \dots + \frac{b^n}{n! 2^n} \frac{d^n [F'(y)f^n(y)]}{dy^n} + \dots$$

qui se rapporte à la racine z de l'équation

$$z = y + \frac{b}{2} f(z),$$

se réduisant à y , pour $b = 0$. Si l'on fait

$$f(y) = y^2 - 1, \quad F'(y) = (y^2 - 1)^{m+\frac{1}{2}},$$

on obtient, pour la somme cherchée,

$$\frac{\sqrt{2}}{b} (1 - 2by + b^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - by - \sqrt{1 - 2by + b^2})^{\frac{1}{2}} \frac{2^m}{b^m} (1 - by - \sqrt{1 - 2by + b^2})^m,$$

et il ne reste plus, en dernier lieu, qu'à calculer l'expression

$$\sum_{m=0}^{m=+\infty} \frac{1}{m! 2^m} \left[\frac{1 - by - \sqrt{1 - 2by + b^2}}{\frac{b^2}{a}(y^2 - 1)} \right]^m \frac{d^m (x^2 + y^2 - 1)^m}{dx^m},$$

que l'on devra multiplier par

$$\frac{\sqrt{2}}{b} \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} (1 - 2by + b^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - by - \sqrt{1 - 2by + b^2})^{\frac{1}{2}},$$

pour avoir la fonction génératrice demandée. On fera cette dernière sommation en employant encore la formule de Lagrange, dans laquelle on remplacera y par x , $f(z)$ par $z^2 + y^2 - 1$, $F'(z)$ par 1 , et b par $a \frac{1 - by - \sqrt{1 - 2by + b^2}}{b^2(y^2 - 1)}$. En opérant ainsi et réduisant, on trouve, pour la fonction génératrice des polynômes $P_{m,n}$,

$$(1 - 2by + b^2)^{-\frac{1}{2}} \left[1 - ax - by - \frac{2(1 - by + \sqrt{1 - 2by + b^2})}{(a^2 + b^2)(y^2 - 1)} \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

La généralisation des résultats précédents, pour le cas d'un nombre quelconque de variables, ne comporte pas la moindre difficulté. Je me contenterai de donner la forme du terme général $P_{m,n,p}$ de la série de polynômes à trois variables satisfaisant à la condition

$$\iiint P_{m,n,p} P_{m',n',p'} dx dy dz = 0$$

avec $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, et à l'exception du cas $m = m'$, $n = n'$, $p = p'$. On a

$$P_{m,n,p} = K_{m,n,p} \frac{1}{(z^2 - 1)^{m+n+1}} \frac{d^p (z^2 - 1)^{m+n+p+1}}{dz^p} \\ \times \frac{1}{(y^2 + z^2 - 1)^{m+\frac{1}{2}}} \frac{d^n (y^2 + z^2 - 1)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n} \frac{d^m (x^2 + y^2 + z^2 - 1)^m}{dz^m},$$

$K_{m,n,p}$ étant une constante.

II.

Considérons la suite $P_{0,m+n}, P_{1,m+n-1}, P_{2,m+n-2}, \dots, P_{m,n}, \dots, P_{m+n,0}$ des polynômes P , dans lesquels la somme des indices est constante et égale à $m+n$. La première fonction de cette suite ne contient qu'un terme du degré $m+n$, qui est en y^{m+n} ; la troisième contient un terme semblable, et de plus un seul autre terme du degré $m+n$, à savoir : un terme en $x^2 y^{m+n-2}$; la cinquième fonction contient deux termes analogues aux précédents, et, en outre, un terme en $x^4 y^{m+n-4}$, de degré $m+n$, et ainsi de suite; de même, la seconde, la quatrième, la sixième, ... fonction de la suite renferment respectivement, si l'on se borne à la partie de ces fonctions qui est du degré $m+n$: ou bien un seul terme en xy^{m+n-1} , ou bien deux termes en xy^{m+n-1} et $x^3 y^{m+n-3}$, ou bien trois termes en xy^{m+n-1} , $x^3 y^{m+n-3}$ et $x^5 y^{m+n-5}$, etc. On conclut de là qu'un terme en $x^h y^k$ pourra toujours s'exprimer par une fonction linéaire des polynômes $P_{m,n}$, dont la somme des indices m, n est égale à $h+k$, augmentée d'un polynôme entier de degré inférieur à $h+k$. La partie de ce polynôme du degré le plus élevé pourra de même être représentée par une fonction linéaire des polynômes P , dans lesquels la somme des indices est égale à ce degré, augmentée d'un polynôme de degré inférieur, et ainsi de suite; de sorte que, finalement, on conçoit la possibilité d'exprimer un terme en $x^h y^k$, par le moyen d'une fonction linéaire des polynômes $P_{m,n}$, pour lesquels on a

$$m+n \leq h+k.$$

De là résulte qu'une fonction quelconque $f(x, y)$ de deux variables, si elle est développable en série ordonnée suivant les puissances entières et positives de x et de y , pourra être mise sous la forme d'une fonction linéaire des polynômes P , et l'on aura

$$f(x, y) = \sum A_{m,n} P_{m,n}$$

$A_{m,n}$ étant une constante, dont la détermination se fera en multipliant les deux membres de l'égalité par $P_{m,n} dx dy$, et en intégrant ensuite les résultats dans l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 = 1$. Alors on obtiendra,

d'après les propriétés contenues dans le paragraphe précédent,

$$(2) \quad \iint f(x, y) P_{m,n} dx dy = A_{m,n} \iint (P_{m,n})^2 dx dy,$$

c'est-à-dire, en s'appuyant sur la formule (1),

$$A_{m,n} = \frac{2m+1}{2\pi} \frac{n! 2^{2m+2n}}{(2m+n+2) \dots (2m+2n+1)} \\ \times \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2m+2n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m+2n+1)} \iint f(x, y) P_{m,n} dx dy.$$

Nous allons tirer du résultat précédent une conséquence importante.

Si l'on cherche, parmi tous les polynômes $\varphi(x)$ de degré μ , celui qui, entre les limites -1 et $+1$ de la variable, s'approche le plus d'une fonction donnée $f(x)$; en d'autres termes, celui qui rend minimum l'intégrale $\int_{-1}^{+1} [f(x) - \varphi(x)]^2 dx$, on trouve, comme on le sait, que ce polynôme est représenté par la portion du développement de $f(x)$, suivant les fonctions X_n de Legendre, qui s'arrête au terme en X_μ inclusivement.

Rien n'est maintenant plus facile que de traiter la question analogue relative à un nombre quelconque de variables, c'est-à-dire que de trouver le polynôme $\varphi(x, y, z, \dots, u)$, du degré μ , qui rend minimum l'intégrale $\iiint \dots [f(x, y, z, \dots, u) - \varphi(x, y, z, \dots, u)]^2 dx dy dz \dots du$, dans laquelle les variables sont limitées par la relation

$$x^2 + y^2 + z^2 + \dots + u^2 \leq 1.$$

Me bornant au cas de deux variables, je puis, en effet, supposer, dans la recherche du minimum de l'intégrale

$$\iint [f(x, y) - \varphi(x, y)]^2 dx dy,$$

que le polynôme $\varphi(x, y)$ de degré μ est mis sous la forme $\sum B_{m,n} P_{m,n}$, $m+n$ ne devant pas dépasser μ , et il s'agit de trouver les coefficients constants $B_{m,n}$. En égalant à zéro la dérivée de l'intégrale par rapport à $B_{m,n}$, on obtient

$$\iint [f(x, y) - \varphi(x, y)] P_{m,n} dx dy = 0,$$

c'est-à-dire

$$\iint f(x, y) P_{m,n} dx dy = B_{m,n} \iint (P_{m,n})^2 dx dy,$$

et, par conséquent, en comparant l'égalité précédente à la formule (2), $B_{m,n} = A_{m,n}$; d'où l'on voit que le polynôme $\varphi(x, y)$ cherché est la portion du développement de la fonction $f(x, y)$ suivant les polynômes P, que l'on obtient en négligeant tous les termes en $P_{m,n}$, dans lesquels $m + n$ est supérieur à μ .

Ici je ferai quelques remarques. On peut poser

$$P_{m,n} = \sum C_{h,k} U_{h,k},$$

$h + k$ ne surpassant pas $m + n$, $C_{h,k}$ étant une constante et $U_{h,k}$ l'une des fonctions de M. Hermite. On en déduit

$$\iint P_{m,n} V_{h,k} dx dy = C_{h,k} \iint U_{h,k} V_{h,k} dx dy,$$

où V désigne la fonction associée de U. Donc $C_{h,k} = 0$, si $h + k$ est inférieur à $m + n$.

Ainsi $P_{m,n}$ s'exprime par une fonction linéaire des polynômes $U_{h,k}$, dans lesquels la somme des indices $h + k$ est égale à $m + n$, de sorte que la fonction entière précédente $\varphi(x, y)$ s'obtiendra également bien par le développement de $f(x, y)$ suivant les polynômes U, en négligeant toujours les termes en $U_{m,n}$, dans lesquels $m + n$ est supérieur à μ . Mais il y a quelque chose de particulier aux fonctions P, qui n'existe plus à l'égard des fonctions U.

Modifions, en effet, l'énoncé de la question précédente en cherchant, parmi tous les polynômes $\varphi(x, y)$ de degré μ , dans lesquels les termes de degré μ ne contiennent pas de puissances de x , ayant des exposants supérieurs à m , celui qui s'approche le plus d'une fonction donnée quelconque $f(x, y)$ dans l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 = 1$. Nous trouverons évidemment le polynôme $\varphi(x, y)$ cherché, dans la portion du développement de $f(x, y)$, suivant les fonctions P, que l'on obtient en prenant les termes en $P_{m,n}$, qui correspondent aux valeurs de $m + n$ inférieures à μ , et, de plus, parmi ceux pour lesquels $m + n = \mu$, les seuls termes en $P_{0,m+n}, P_{1,m+n-1}, \dots, P_{m,n}$.

Si, au lieu de limiter ainsi la portion de degré μ du polynôme $\varphi(x, y)$, on l'astreignait à ne pas contenir de puissances de y supérieures à m , la solution serait alors donnée au moyen d'une nouvelle série de fonctions $P'_{m,n}$, se déduisant de la série des fonctions $P_{m,n}$, par la permu-

tation de x et de y , de sorte que l'on aurait

$$P'_{m,n} = \frac{1}{m!n!2^{2m+n}} \frac{1}{(x^2-1)^{m+\frac{1}{2}}} \frac{d^n(x^2-1)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dx^n} \frac{d^m(x^2+y^2-1)^n}{dy^m}.$$

Mais cette nouvelle série, qui satisfait aussi à la relation

$$\iint \mathbf{P}'_{m,n} \mathbf{P}'_{m',n'} dx dy = 0,$$

quand $(m - m')^2 + (n - n')^2$ n'est pas nul, ne peut pas être regardée comme réellement distincte de la première.

La considération des polynômes $P_{m,n}$ permet de retrouver les fonctions U et V de M. Hermite ainsi qu'il suit.

Définissons une série de polynômes $V'_{m,n}$, de manière que chacun d'eux soit une fonction linéaire quelconque des fonctions $P_{\lambda,\mu}$ pour lesquelles la somme des indices $h+k=m+n$. Nous aurons alors, tous les α étant arbitraires,

$$\begin{aligned} V'_{\alpha, m+n} &= \alpha_{\alpha, 0} P_{0, m+n} + \alpha_{\alpha, 1} P_{1, m+n-1} + \dots + \alpha_{\alpha, m+n} P_{m+n, 0}, \\ V'_{1, m+n-1} &= \alpha_{1, 0} P_{0, m+n} + \alpha_{1, 1} P_{1, m+n-1} + \dots + \alpha_{1, m+n} P_{m+n, 0}, \\ &\dots \\ V'_{m+n, 0} &= \alpha_{m+n, 0} P_{0, m+n} + \alpha_{m+n, 1} P_{1, m+n-1} + \dots + \alpha_{m+n, m+n} P_{m+n, 0}. \end{aligned}$$

Une fonction $U'_{m,n}$ de la forme

$$B_0 P_{0, m+n} + B_1 P_{1, m+n-1} + \dots + B_{m+n} P_{m+n, 0}$$

sera complètement déterminée, à un facteur constant près, par les conditions

$$\begin{aligned} \iint U'_{m,n} V'_{0,m+n} dx dy &= 0, & \iint U'_{m,n} V'_{1,m+n-1} dx dy &= 0, \dots, \\ \iint U'_{m,n} V'_{m-1,n+1} dx dy &= 0, & \iint U'_{m,n} V'_{m+1,n-1} dx dy &= 0, \dots \end{aligned}$$

Les deux séries de fonctions $U'_{m,n}$ et $V'_{m,n}$ constitueront évidemment un système complètement analogue au système des deux séries de polynômes U et V de M. Hermite, en ce sens que l'on aura

$$\iint U'_{m,n} V'_{m',n'} dx dy = 0$$

quand $(m - m')^2 + (n - n')^2$ ne sera pas nul.

Voilà donc un moyen de former une infinité de systèmes de fonctions associées; pour retrouver, par la méthode précédente, le système de M. Hermite, il suffira de prendre les α de manière que la fonction $V'_{m,n}$ contienne le seul terme, en $x^m y^n$, de degré $m+n$. Les fonctions V' et V se confondent alors, ainsi que les fonctions U' et U . L'expression des fonctions U et V au moyen des polynômes P est intéressante, ainsi que l'expression réciproque au moyen des polynômes V de $P_{m,n}$. C'est ce dernier résultat qui m'a conduit à mettre $P_{m,n}$ sous la forme donnée antérieurement. Mais, pour abrégé, je n'indiquerai pas ces diverses expressions.

III.

Ce paragraphe sera consacré à l'étude d'un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre, auquel satisfait le polynôme $P_{m,n}$, et qui le caractérise, si l'on se borne aux solutions du système qui sont des fonctions entières.

Soit, pour un instant, $u = (x^2 + y^2 - 1)^m$; on en conclut

$$\frac{du}{dx} = 2mx(x^2 + y^2 - 1)^{m-1},$$

ou bien

$$(x^2 + y^2 - 1) \frac{du}{dx} = 2mx \cdot u;$$

et, par suite, en différentiant $m+1$ fois par rapport à x ,

$$(x^2 + y^2 - 1) \frac{d^{m+2}u}{dx^{m+2}} + 2x \frac{d^{m+1}u}{dx^{m+1}} - m(m+1) \frac{d^m u}{dx^m} = 0.$$

Si donc l'on se reporte maintenant à la forme analytique du polynôme $P_{m,n}$, que je représenterai simplement par P , on reconnaît que ce polynôme satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$(3) \quad (1 - x^2 - y^2) \frac{d^2 P}{dx^2} - 2x \frac{dP}{dx} + m(m+1)P = 0.$$

Ensuite, comme $P_{m,n}$ est une fonction linéaire des polynômes $V_{h,k}$, pour lesquels la somme $h+k$ des indices est égale à $m+n$, il est clair

que l'on a

$$(4) \quad \begin{cases} (1-x^2) \frac{d^2 P}{dx^2} + (1-y^2) \frac{d^2 P}{dy^2} - 2xy \frac{d^2 P}{dx dy} \\ - 3x \frac{dP}{dx} - 3y \frac{dP}{dy} + (m+n)(m+n+2)P = 0, \end{cases}$$

équation qui convient, comme je l'ai fait voir autrefois, à tous ces polynômes $V_{h,k}$. Mais, désirant faire l'étude de la fonction P , indépendamment de celle des fonctions V , je vais trouver directement cette dernière équation. En posant

$$Q = \frac{1}{(y^2-1)^{m+\frac{1}{2}}} \frac{d^m (y^2-1)^{m+\frac{1}{2}}}{dy^m}, \quad R = \frac{d^m (x^2+y^2-1)^m}{dx^m},$$

on a, par la suppression d'un facteur constant, $P = QR$, et l'on voit que l'expression

$$(5) \quad \begin{cases} (1-x^2) \frac{d^2 P}{dx^2} + (1-y^2) \frac{d^2 P}{dy^2} - 2xy \frac{d^2 P}{dx dy} \\ - 3x \frac{dP}{dx} - 3y \frac{dP}{dy} + (m+n)(m+n+2)P \end{cases}$$

est égale à

$$\begin{aligned} Q & \left[(1-x^2) \frac{d^2 R}{dx^2} + (1-y^2) \frac{d^2 R}{dy^2} - 2xy \frac{d^2 R}{dx dy} \right. \\ & \quad \left. - 3x \frac{dR}{dx} - 3y \frac{dR}{dy} + (m+n)(m+n+2)R \right] \\ & + R \left[(1-y^2) \frac{d^2 Q}{dy^2} - 3y \frac{dQ}{dy} \right] + 2 \frac{dQ}{dy} \left[(1-y^2) \frac{dR}{dy} - xy \frac{dR}{dx} \right]. \end{aligned}$$

En opérant comme je l'ai fait dans le tome V des *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, on arrive au résultat suivant, qui d'ailleurs s'y trouve indiqué :

$$(1-x^2) \frac{d^2 R}{dx^2} + (1-y^2) \frac{d^2 R}{dy^2} - 2xy \frac{d^2 R}{dx dy} - 3x \frac{dR}{dx} - 3y \frac{dR}{dy} + m(m+2)R = 0.$$

D'un autre côté, posons

$$R' = \frac{d^m (x^2+y^2-z^2)^m}{dx^m},$$

nous obtiendrons

$$x \frac{dR'}{dx} + y \frac{dR'}{dy} + z \frac{dR'}{dz} = mR',$$

puisque R' est une fonction homogène de x, y, z . Mais

$$\frac{dR'}{dz} = -2mz \frac{d^n(x^2 + y^2 - z^2)^{m-1}}{dx^n} = -\frac{z}{y} \frac{dR'}{dy}.$$

Donc

$$xy \frac{dR'}{dx} + y^2 \frac{dR'}{dy} - z^2 \frac{dR'}{dy} = mR',$$

et, si l'on fait $z = 1$,

$$xy \frac{dR}{dx} + (y^2 - 1) \frac{dR}{dy} = mR.$$

Par conséquent, l'expression (5) se réduit à

$$R \left[(1 - y^2) \frac{d^2 Q}{dy^2} - (2m + 3)y \frac{dQ}{dy} + n(2m + n + 2)Q \right];$$

de telle façon que l'équation (4) sera établie si l'on fait voir que la fonction Q satisfait à l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$(6) \quad (1 - y^2) \frac{d^2 Q}{dy^2} - (2m + 3)y \frac{dQ}{dy} + n(2m + n + 2)Q = 0.$$

C'est ce que l'on reconnaît facilement de la manière suivante. Soit $v = (y^2 - 1)^{m+n+\frac{1}{2}}$. On en conclut

$$\frac{dv}{dy} = (2m + 2n + 1)y(y^2 - 1)^{m+n-\frac{1}{2}},$$

et, par suite,

$$(y^2 - 1) \frac{dv}{dy} = (2m + 2n + 1)yv.$$

Différentiant ensuite $n + 1$ fois par rapport à y , on obtient

$$(y^2 - 1) \frac{d^{n+2}v}{dy^{n+2}} - (2m - 1)y \frac{d^{n+1}v}{dy^{n+1}} - (n + 1)(2m + n + 1) \frac{d^n v}{dy^n} = 0,$$

et il suffit de remplacer dans cette formule $\frac{d^n v}{dy^n}$ par $(y^2 - 1)^{m+\frac{1}{2}}Q$, pour trouver l'équation (6).

Le système des équations (3) et (4), auquel satisfait le polynôme $P_{m,n}$, permet d'établir sans difficulté la proposition exprimée par l'égalité suivante

$$\iint P_{m,n} P_{m',n'} dx dy = 0.$$

On a, en effet,

$$(1 - x^2 - y^2) \frac{d^2 P_{m,n}}{dx^2} - 2x \frac{dP_{m,n}}{dx} + m(m+1) P_{m,n} = 0,$$

$$(1 - x^2 - y^2) \frac{d^2 P_{m',n'}}{dx^2} - 2x \frac{dP_{m',n'}}{dx} + m'(m'+1) P_{m',n'} = 0.$$

Multiplions la première de ces équations par $P_{m',n'} dx dy$, la seconde par $P_{m,n} dx dy$, retranchons et intégrons les deux membres de l'équation résultante entre les limites $x^2 + y^2 \leq 1$, nous obtiendrons

$$\begin{aligned} & \iint \left[(1 - x^2 - y^2) \left(P_{m',n'} \frac{d^2 P_{m,n}}{dx^2} - P_{m,n} \frac{d^2 P_{m',n'}}{dx^2} \right) \right. \\ & \quad \left. - 2x \left(P_{m',n'} \frac{dP_{m,n}}{dx} - P_{m,n} \frac{dP_{m',n'}}{dx} \right) \right] dx dy \\ & = [m'(m'+1) - m(m+1)] \iint P_{m,n} P_{m',n'} dx dy. \end{aligned}$$

Le premier membre est égal à

$$\iint \frac{d \left[(1 - x^2 - y^2) \left(P_{m',n'} \frac{dP_{m,n}}{dx} - P_{m,n} \frac{dP_{m',n'}}{dx} \right) \right]}{dx} dx dy,$$

et, en faisant l'intégration par rapport à x , on obtient zéro comme résultat; donc, si m et m' sont différents,

$$\iint P_{m,n} P_{m',n'} dx dy = 0.$$

Si l'on veut compléter la démonstration de l'égalité précédente pour tous les cas où elle a lieu, il suffira dès lors de l'établir pour l'hypothèse où $m + n$ serait différent de $m' + n'$, et c'est ce que j'ai fait, dans le tome V des *Annales de l'École Normale*, au moyen de l'équation (4).

J'arrive maintenant à la recherche de la solution générale du système des équations (3) et (4). Cette solution contient évidemment quatre constantes arbitraires, et on pourra l'obtenir en prenant la dérivée

d'ordre m , relative à x , de la solution du système

$$(7) \quad \begin{cases} (1-x^2-y^2) \frac{d^2 S}{dx^2} + 2(m-1)x \frac{dS}{dx} + 2mS = 0, \\ (1-x^2) \frac{d^2 S}{dx^2} + (1-y^2) \frac{d^2 S}{dy^2} - 2xy \frac{d^2 S}{dx dy} \\ + (2m-3)x \frac{dS}{dx} + (2m-3)y \frac{dS}{dy} + (2m+n)(n+2)S = 0, \end{cases}$$

qui est tel, qu'en posant $\frac{d^m S}{dx^m} = Q$, Q satisfait aux équations (3) et (4), comme on s'en assure immédiatement.

Si l'on fait $S = (x^2 + y^2 - 1)^m T$, le système (7) se transforme dans le suivant :

$$(8) \quad \begin{cases} (1-x^2-y^2) \frac{d^2 T}{dx^2} - 2(m+1)x \frac{dT}{dx} = 0, \\ (1-x^2) \frac{d^2 T}{dx^2} + (1-y^2) \frac{d^2 T}{dy^2} - 2xy \frac{d^2 T}{dx dy} \\ - (2m+3)x \frac{dT}{dx} - (2m+3)y \frac{dT}{dy} + n(2m+n+2)T = 0, \end{cases}$$

qui se résout facilement de la manière suivante.

La première équation de ce système donne

$$T = \varphi(y) + \psi(y) \int_0^x \frac{dx}{(1-x^2-y^2)^{m+1}},$$

et, en substituant cette valeur de T dans la seconde équation, on obtient comme résultat, après des réductions aisées,

$$(1-y^2) \frac{d^2 \varphi}{dy^2} - (2m+3)y \frac{d\varphi}{dy} + n(2m+n+2)\varphi + \int_0^x \frac{dx}{(1-x^2-y^2)^{m+1}} \\ \times \left[(1-y^2) \frac{d^2 \psi}{dy^2} + (2m-1)y \frac{d\psi}{dy} + (n+1)(2m+n+1)\psi \right] = 0,$$

relation qui se dédouble évidemment dans les deux suivantes :

$$(9) \quad \begin{cases} (1-y^2) \frac{d^2 \varphi}{dy^2} - (2m+3)y \frac{d\varphi}{dy} + n(2m+n+2)\varphi = 0, \\ (1-y^2) \frac{d^2 \psi}{dy^2} + (2m-1)y \frac{d\psi}{dy} + (n+1)(2m+n+1)\psi = 0. \end{cases}$$

Mais la dernière de ces deux équations se déduit de la précédente par la substitution dans celle-ci de $(1 - y^2)^{-m-\frac{1}{2}}\psi$ à la place de φ , de sorte qu'il suffit maintenant de résoudre l'équation (9).

Pour y arriver, j'observe que, si χ satisfait à la relation

$$(10) \quad (1 - y^2) \frac{d^2 \chi}{dy^2} + (2m + 2n - 1)y \frac{d\chi}{dy} + (2m + 2n + 1)\chi = 0,$$

et que l'on pose $\frac{d^n \chi}{dy^n} = \psi$, ψ satisfera à l'équation (9).

Dès lors, tout revient finalement à résoudre cette équation (10). On reconnaît qu'elle a pour solution $\chi = (1 - y^2)^{m+n+\frac{1}{2}}$; on en déduira, par l'une quelconque des méthodes connues, son intégrale générale, qui est

$$\chi = (1 - y^2)^{m+n+\frac{1}{2}} \left(C + D \log \frac{1-y}{1+y} \right),$$

C et D étant deux constantes arbitraires. En résumé, la solution du système des équations (3) et (4) est la suivante :

$$\begin{aligned} P = & \frac{1}{(y^2 - 1)^{m+\frac{1}{2}}} \frac{d^m (x^2 + y^2 - 1)^n}{dx^m} \\ & \times \left\{ A \frac{d^n (y^2 - 1)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n} + B \frac{d^n \left[(y^2 - 1)^{m+n+\frac{1}{2}} \log \frac{1-y}{1+y} \right]}{dy^n} \right\} \\ & + \frac{d^n \left[(x^2 + y^2 - 1)^n \int_0^x \frac{dx}{(x^2 + y^2 - 1)^{m+1}} \right]}{dx^n} \\ & \times \left\{ C \frac{d^n (y^2 - 1)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n} + D \frac{d^n \left[(y^2 - 1)^{m+n+\frac{1}{2}} \log \frac{1-y}{1+y} \right]}{dy^n} \right\}, \end{aligned}$$

A, B, C, D désignant quatre constantes arbitraires.

Le coefficient seul de A étant une fonction entière de x et de y , $P_{m,n}$ est bien, comme nous l'avons annoncé, le seul polynôme solution du système des équations (3) et (4).

IV.

On peut mettre aisément la fonction $P_{m,n}$ sous la forme d'un produit élégant de deux intégrales définies simples. La formule de Laplace

$$\frac{1}{m! 2^m} \frac{d^m (x^2 - 1)^m}{dx^m} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x - \cos \varphi \sqrt{x^2 - 1})^m d\varphi$$

donne d'abord

$$\frac{1}{m! 2^m} \frac{d^m (x^2 + y^2 - 1)^m}{dx^m} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x - \cos \varphi \sqrt{x^2 + y^2 - 1})^m d\varphi.$$

Soit maintenant

$$Q = \frac{1}{(y^2 - 1)^{m+\frac{1}{2}}} \frac{d^n (y^2 - 1)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n}.$$

Il est clair que l'on peut poser

$$Q = \sum A_h y^h (\sqrt{y^2 - 1})^{n-h},$$

où l'on suppose que A_h est une constante, et que $n - h$ est un nombre pair, positif et entier. On a

$$Q = (y^2 - 1)^{-\frac{n}{2}} \sum A_h \left(\frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}} \right)^h,$$

et aussi

$$Q = (x^2 - 1)^{-\frac{n}{2}} \sum A_h x^h,$$

si les variables x et y sont liées ensemble par la relation $\frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}} = x$.

En faisant le même changement de variables dans l'équation (6), à laquelle satisfait le polynôme Q , on obtient

$$(x^2 - 1)^2 \frac{d^2 Q}{dx^2} - 2mx(x^2 - 1) \frac{dQ}{dx} - n(2m + n + 2)Q = 0.$$

Si actuellement on pose, dans cette équation, $Q = (x^2 - 1)^{-\frac{n}{2}} H$, elle devient

$$(x^2 - 1) \frac{d^2 H}{dx^2} - 2(m + n)x \frac{dH}{dx} + n(2m + n + 1)H = 0,$$

et cette nouvelle équation, qui admet pour solution le polynôme de degré n , $\sum A_h x^h$, permettra de le déterminer facilement, à un facteur constant près. On trouve

$$\begin{aligned} A_{n-1} &= 0, \quad A_{n-2} = 0, \quad A_{n-3} = 0, \dots, \\ A_{n-1} &= \frac{n(n-1)}{2(2m+3)} A_n, \quad A_{n-2} = \frac{(n-2)(n-3)}{4(2m+5)} A_{n-1}, \dots, \\ A_{n-2k} &= \frac{(n-2k+2)(n-2k+1)}{2k(2m+2k+1)} A_{n-2k+2}, \dots; \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$A_{n-2k} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2k(2m+3)(2m+5) \dots (2m+2k+1)} A_n.$$

Je groupe les facteurs de A_{n-2k} de la manière suivante :

$$A_{n-2k} = \frac{n!}{(2k)!(n-2k)!} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{(2m+3)(2m+5) \dots (2m+2k+1)} A_n,$$

et j'observe que

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{(2m+3)(2m+5) \dots (2m+2k+1)} = \frac{1}{\int_0^\pi \sin^{2m+1} \varphi' d\varphi'} \int_0^\pi \sin^{2m+1} \varphi' \cos^k \varphi' d\varphi'.$$

Si donc l'on pose $\frac{A_n}{\int_0^\pi \sin^{2m+1} \varphi' d\varphi'} = C$, et si l'on remarque que $\int_0^\pi \sin^{2m+1} \varphi' \cos^h \varphi' d\varphi'$ est nul quand h est impair, on reconnaitra l'exactitude de la formule

$$Q = C \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \frac{n!}{h!(n-h)!} \int_0^\pi \sin^{2m+1} \varphi' \cos^h \varphi' y^{n-h} (\sqrt{y^2-1})^h d\varphi',$$

qui peut être écrite

$$Q = C \int_0^\pi \sin^{2m+1} \varphi' (y - \cos \varphi' \sqrt{y^2-1})^n d\varphi'.$$

Pour déterminer la constante C, on égalera les coefficients des termes en y^n des deux membres, ce qui donnera

$$\begin{aligned} & (2m+n+2)(2m+n+3)\dots(2m+2n+1) \\ &= C \int_0^\pi \sin^{2m+1} \varphi' (1 - \cos \varphi')^n d\varphi' \\ &= C \cdot 2^{2m+n+1} \frac{m!}{(m+n+1)(m+n+2)\dots(2m+n+1)}. \end{aligned}$$

Ainsi, finalement,

$$\begin{aligned} P_{m,n} &= \frac{1}{2^{2m+2n+1}} \frac{(2m+2n+1)!}{m!n!(m+n)!} \frac{1}{\pi} \\ &\times \int_0^\pi (x - \cos \varphi \sqrt{x^2 + y^2 - 1})^m d\varphi \int_0^\pi \sin^{2m+1} \varphi' (y - \cos \varphi' \sqrt{y^2 - 1})^n d\varphi', \end{aligned}$$

et cette forme analytique rappelle la forme donnée par Laplace à la fonction X_n de Legendre. Du reste, cette dernière fonction présente avec les polynômes $P_{m,n}$ de nombreuses analogies. En particulier, je citerai l'égalité

$$(11) \quad \iint P_{m,n} x^h y^k dx dy = 0,$$

qui résulte des propriétés des fonctions P, et qui convient à toutes les valeurs entières et positives de h et de k dont la somme est inférieure à $m+n$, et aussi, quand cette somme est égale à $m+n$, aux valeurs de h inférieures à m . Le système des équations précédentes caractérise, à un facteur constant près, le polynôme $P_{m,n}$, si l'on admet que ce polynôme est du degré $m+n$, et que, dans les termes du plus haut degré $m+n$, l'exposant de x ne peut pas dépasser m .

Soit

$$P_{m,n} = \sum_{r,s} A_{r,s} x^r y^s.$$

L'équation (11) donne

$$\sum_{r,s} A_{r,s} \iint x^{r+h} y^{s+k} dx dy = 0,$$

ou bien

$$(12) \quad \sum_{r,s} A_{r,s} S_{r+h,s+k} = 0,$$

si l'on pose, en général,

$$S_{p,q} = \iint z^p z'^q dz dz'.$$

On admet toujours que les limites de l'intégration sont données par la condition $z^2 + z'^2 \leq 1$.

La relation (12) montre que, dans le produit de $P_{m,n}$ par la série

$$\frac{S_{0,0}}{xy} + \frac{S_{0,1}}{xy^2} + \frac{S_{1,0}}{x^2y} + \dots + \frac{S_{p,q}}{x^{p+1}y^{q+1}} + \dots,$$

qui est égale à

$$\iint \frac{dz dz'}{(x-z)(y-z')},$$

ou bien à

$$2\pi \operatorname{arctang} \frac{1}{x\sqrt{y^2-1} + y\sqrt{x^2-1}},$$

le terme en $\frac{1}{x^{h+1}y^{k+1}}$ n'existe pas; et ceci aura lieu pour toutes les valeurs de h et de k indiquées plus haut. L'analogie de ce qui précède avec ce qui a lieu pour la fonction X_n , relativement au produit $X_n \int_1^{+1} \frac{dz}{x-z} = X_n \log \frac{x+1}{x-1}$, est évidente.

V.

Cette propriété du polynôme $P_{m,n}$ m'a donné l'idée d'étendre, à un certain point de vue, aux fonctions de plusieurs variables, la théorie de l'intégrale $\int_a^b \frac{f(z)dz}{x-z}$. Pour abréger, je considérerai seulement le cas de deux variables. Soit l'intégrale

$$I = \iint \frac{f(z, z') dz dz'}{(x-z)(y-z')},$$

où les variables z, z' sont limitées par une condition quelconque indépendante de x et de y , que je ne spécifierai pas, mais qui restera la

même dans toutes les intégrales suivantes. On a

$$I = \sum_{m=0}^{m=+\infty} \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{T_{p,q}}{x^{p+1} y^{q+1}},$$

en posant

$$T_{p,q} = \iint f(z, z') z^p z'^q dz dz'.$$

Cela étant, on peut définir une série de polynômes $Q_{m,n}$ de la manière suivante. Le polynôme $Q_{m,n}$ sera du degré $m+n$, et les termes de degré $m+n$ ne contiendront pas de puissances de x supérieures à x^m ; de plus, le produit $IQ_{m,n}$ ne renfermera pas de termes en $\frac{1}{x^{h+1} y^{k+1}}$, h et k devant prendre toutes les valeurs entières et positives dont la somme est inférieure à $m+n$; ou bien, dans le cas de $h+k$ égal à $m+n$, h devant rester plus petit que m . Soit

$$Q_{m,n} = \sum_{r,s} B_{r,s} x^r y^s.$$

On exprimera que, dans le produit $IQ_{m,n}$, le terme en $\frac{1}{x^{h+1} y^{k+1}}$ n'existe pas, par la relation

$$\sum_{r,s} B_{r,s} T_{r+h, s+k} = 0,$$

ou bien

$$\iint f(x, y) \sum_{r,s} B_{r,s} x^{r+h} y^{s+k} dx dy = 0,$$

ou enfin

$$\iint f(x, y) Q_{m,n} x^h y^k dx dy = 0.$$

Cette relation montre immédiatement que l'intégrale

$$\iint f(x, y) Q_{m,n} Q_{m',n'} dx dy$$

est nulle, si l'on n'a pas en même temps $m = m'$, $n = n'$.

Dans le développement du produit $IQ_{m,n}$, on trouve non-seulement des termes en $\frac{1}{x^{h+1} y^{k+1}}$ contenant à la fois x et y en dénominateur, mais

la condition $z^2 + z'^2 \leq 1$, et si l'on prend $f(z, z') = 1$, on trouve

$$Q_{m,n} = P_{m,n}.$$

Si, en conservant la même limitation des variables, on prend

$$f(z, z') = (z^2 + z'^2 - 1)^h,$$

h étant supérieur à -1 , pour que l'intégrale $\iint \frac{f(z, z')}{(x-z)(y-z')} dz dz'$ soit finie, on trouve

$$Q_{m,n} = \frac{1}{(y^2 - 1)^{m+n+\frac{1}{2}}} \frac{d^n (y^2 - 1)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n} \frac{1}{(x^2 + y^2 - 1)^h} \frac{d^m (x^2 + y^2 - 1)^{m+h}}{dx^m}.$$



ÉTUDE
SUR
LE TIMBRE DES SONS

PRODUITS

PAR DES CHOCS DISCONTINUS ET EN PARTICULIER PAR LA SIRÈNE;

PAR M. A. TERQUEM,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE STRASBOURG.

I. — *Introduction.*

Les sons musicaux peuvent être produits, comme chacun le sait, de deux manières différentes, soit à l'aide d'un corps vibrant, qui communique aux molécules de l'air ambiant des vibrations isochrones, soit à l'aide d'impulsions ou de chocs isolés, séparés les uns des autres par des intervalles de temps plus ou moins considérables. Le premier mode de vibrations fut longtemps le seul admis; car, dans le Traité d'acoustique de Chladni, le second mode ne se trouve pas mentionné d'une manière explicite, quoique ce savant en eût déjà constaté l'existence; le son qu'il nommait *son ronflant* des cordes (*Klirrton*) est dû, en effet, aux chocs périodiques d'une corde contre un chevalet, placé au milieu ou au tiers de sa longueur.

Le premier appareil qui permit de produire des sons musicaux par des chocs isolés fut la sirène de Cagniard de la Tour (*). Peu de temps après

(*) Sur la sirène, nouvelle machine d'acoustique destinée à mesurer les vibrations de l'air qui constituent le son, par le baron Cagniard de la Tour (*Annales de Chimie et de Physique*, 2^e série, t. XII, p. 167).

la publication de cette importante découverte, se produisit une réclamation de priorité de la part du docteur Robison. Celui-ci, en effet, dans l'article *Tempérament* de l'*Encyclopédie Britannique*, avait décrit un appareil formé « d'un tube muni d'un robinet à taquet pouvant faire 720 oscillations par seconde; on obtenait alors un son rappelant une voix claire de femme; avec 360 oscillations seulement par seconde, le son obtenu rappelait une voix rude d'homme; quand le robinet ne ferme que partiellement, on a un son plus doux, uni et tendre. » Cagniard de la Tour (*) maintint ses droits devant la réclamation de Robison; néanmoins, quoique la sirène ait rendu de plus grands services à la science que le tube à robinet de Robison, qui serait complètement tombé dans l'oubli si M. Tyndall n'en avait dit quelques mots dans ses leçons d'acoustique; quoique, certainement, Cagniard de la Tour ait complètement ignoré l'existence de ce dernier appareil quand il a imaginé la sirène, il faut cependant reconnaître, avec M. Tyndall, que Robison le premier eut l'idée de produire des sons à l'aide d'un courant d'air intermittent; car, à cette époque, on n'avait encore qu'une idée très-vague du mouvement de l'air dans les tuyaux à anches.

Quelques années après, Chladni publia, dans les *Annales de Poggendorf*, une Note sur la production des sons par des chocs isolés, où toutes les conditions de ce genre de vibrations sont parfaitement indiquées (**). « On admet généralement, dit Chladni, que, pour entendre un son musical, il est nécessaire de se servir d'un corps sonore dont les vibrations se propagent par l'air ou tout autre milieu; c'est le cas habituel. Mais un son musical peut aussi être produit par des chocs se succédant à des instants rapprochés et provoquant dans le milieu ambiant des ondes sonores.

» L'anche ne doit pas être considérée comme un corps sonore, la hauteur ou la gravité du son dépend de l'intervalle de temps qui sépare les ouvertures et les fermetures de la fente, et par suite des chocs isolés dus aux interruptions que subit l'écoulement de l'air. La sirène de Cagniard de la Tour produit des sons de la même manière. On peut

(*) *Annales de Chimie et de Physique*, 2^e série, t. XVIII.

(**) *Sur les tons obtenus, sans corps vibrants, simplement par des chocs se succédant rapidement*, par Chladni (*Ann. Pogg.*, t. VIII, p. 453; 1826).

rapporter à la même cause le bruissement et le bourdonnement de quelques insectes volants; pour une guêpe ou une grosse mouche, cela irait à quelques centaines, pour un cousin à plusieurs milliers par seconde. Pour les corps solides, on peut citer les sons ronflants des cordes.... Vraisemblablement, on pourrait produire un son très-rauque et sans pureté, mais parfaitement déterminable, par d'autres modes de chocs rapides et réguliers d'un corps solide contre un autre, par exemple par les chocs d'un ressort contre les dents d'une roue tournant rapidement et régulièrement....

» ... On doit donc donner plus d'extension à la définition du mot *son musical* qu'on ne le fait d'habitude, puisque les vibrations fixes d'un corps sonore ne sont pas toujours nécessaires pour produire ce dernier et qu'il peut être dû à des chocs assez énergiques, se succédant rapidement, et se communiquant à l'air et de celui-ci à l'oreille. »

Il est donc évident que, le premier, Chladni a nettement défini la production de sons musicaux par des chocs discontinus; que, de plus, il a indiqué la possibilité d'obtenir des sons bien caractérisés à l'aide de roues dentées, avant que Savart n'en ait réalisé l'expérience, probablement sans avoir connaissance de l'idée émise par son illustre précurseur.

L'instrument qui permet d'obtenir un grand nombre de sons dans les conditions les plus variées, à l'aide d'impulsions et de chocs discontinus, est évidemment la sirène.

Employée d'abord par Cagniard de la Tour pour mesurer la hauteur des sons, elle a reçu divers perfectionnements, et, aujourd'hui, elle sert plutôt à l'étude du timbre, des battements, des sons de combinaison, qu'à la détermination des nombres de vibrations, puisque, pour cette dernière étude, on peut employer le procédé graphique ou encore mieux le tonomètre.

Quelles sont les principales transformations qu'a subies la sirène, à quelles études a-t-elle principalement servi?

En 1834, Opelt (*) eut l'idée de substituer à la sirène de Cagniard de la Tour un simple disque de carton percé de plusieurs rangées d'ouvertures, les nombres de trous des rangées étant entre eux dans le rapport des intervalles de l'accord parfait, comme Savart l'avait déjà

(*) *Sur la nature du son*, par Opelt; Plauen, 1834.

fait avec des roues dentées (*), en 1828. Auguste Seebeck (**) adopta la même disposition pour la sirène avec laquelle il fit ses remarquables expériences; cet appareil prit le nom de *sirène de Seebeck*, quoique Opelt en soit le véritable inventeur. La sirène de Seebeck était, comme celle d'Opelt, formée d'un disque de carton, avec des rangées concentriques d'ouvertures; elle était mise en mouvement à l'aide d'un poids fixé à une corde enroulée sur un tambour; on produisait le son le plus souvent en soufflant contre les ouvertures du disque par un ou plusieurs tubes étroits, quelquefois en faisant frotter contre celui-ci une carte coupée en pointe.

Voici les principaux résultats auxquels est arrivé Seebeck :

1° Si l'on place deux tuyaux porte-vent de part et d'autre de la sirène, il y a interférence quand les tuyaux correspondent tous deux à des ouvertures; renforcement, au contraire, quand ils se trouvent à une distance égale à la moitié de l'intervalle qui sépare deux ouvertures.

2° Si, sur un même disque, se trouvent deux rangées concentriques d'ouvertures, le nombre d'ouvertures de l'une étant double de celles de l'autre, et si on les ébranle à la fois de deux côtés différents de telle sorte que les impulsions coïncident, on n'entend plus que le son le plus grave seul.

3° Si les impulsions, toutes dans le même sens, ne sont plus équidistantes, mais sont séparées par les temps t et t' , on entend les sons correspondants aux temps $t + t'$ et $\frac{t+t'}{2}$; l'un est plus ou moins intense que l'autre, suivant que t et t' diffèrent plus ou moins l'un de l'autre.

4° Si les intervalles qui séparent les impulsions sont t , t' et t'' , on entend le son $t + t' + t''$, et, en outre, si t , t' et t'' ne diffèrent pas trop l'un de l'autre, le son $\frac{t+t'+t''}{3}$.

5° Si les intervalles qui séparent les impulsions sont complètement irréguliers, sans s'écarter beaucoup de la moyenne, on entend un son

(*) Note sur la sensibilité de l'organe de l'ouïe, par Félix Savart (*Annales de Chimie et de Physique*, t. XLIV, p. 337; 1828).

(**) SEEBECK, *Beobachtungen und Tonbildungen an der Sirene* (*Ann. Pogg.*, t. LIII, p. 417; 1841. — *Repertorium von Physik von Dove*, t. VII et VIII, *passim*).

sorte que, si l'oreille est atteinte par un mouvement vibratoire, non figuré par un sinus ou un cosinus du temps, elle entendra autant de sons simultanés qu'il existe de termes dans la série de Fourier, dont les coefficients aient une valeur sensible.

Cette idée de Ohm, qu'on avait plus tard laissée tomber un peu dans l'oubli, a été reprise et développée par M. Helmholtz dans son ouvrage : *Die Lehre der Tonempfindungen*; il importe toutefois de préciser dans quelles limites cette théorie de Ohm et de Helmholtz, admise par les uns, combattue par d'autres, doit être acceptée.

M. Helmholtz distingue les sons musicaux en deux grandes classes, les sons simples ou pendulaires, et les sons complexes, pour lesquels la loi de vibration est représentée par une fonction quelconque du temps autre qu'un sinus ou un cosinus, fonction qu'on pourra développer suivant la série de Fourier. L'oreille devra, conformément à l'hypothèse de Ohm, percevoir simultanément une infinité de sons pendulaires, dont les amplitudes seront les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, des divers termes de cette série. Mais en outre, M. Helmholtz admet que le timbre du son correspondant au premier terme variable de la série (α_1), nommé le son fondamental, dépend des valeurs relatives des amplitudes $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m$, des sons supérieurs ou harmoniques du premier.

Il est évident, en effet, qu'étant donné un mouvement vibratoire, quelque complexe qu'il soit, on pourra toujours le reproduire à l'aide de divers sons simples ou pendulaires simultanés, ayant entre eux les relations de hauteur des divers harmoniques, avec des amplitudes et des phases convenablement choisies. Or, comme l'oreille possède la faculté de percevoir isolément des sons simples produits au même instant par divers instruments placés dans le voisinage l'un de l'autre, il en sera de même évidemment si le mouvement complexe qui lui arrive, dû à un seul instrument, est identique au précédent. Ni au point de vue de la théorie ni au point de vue de l'expérience, il ne peut y avoir la moindre différence.

Peut-on dire, comme le prétend M. Helmholtz, que les sons correspondant aux divers termes de la série de Fourier ont une existence objective? C'est aller trop loin; on doit se contenter d'affirmer que l'oreille, étant atteinte par un mouvement non pendulaire, le perçoit comme s'il était dû à la superposition de divers sons pendulaires pro-

duits indépendamment les uns des autres. Cette décomposition par l'oreille d'un mouvement vibratoire complexe en mouvements simples pendant la perception, est en effet démontrée par de nombreuses expériences; elle n'est possible théoriquement, du reste, que d'une seule manière, les amplitudes et les phases correspondant à chaque son étant données par la série de Fourier.

L'expérience fait voir, en outre, que l'oreille perçoit difficilement les harmoniques supérieurs en présence de leur son fondamental, à moins d'une attention toute particulière et d'une grande habitude; même ces conditions se trouvant remplies, il est le plus souvent impossible de les percevoir isolément. M. Helmholtz ne rend peut-être pas compte d'une manière aussi satisfaisante que possible de cette difficulté de perception des harmoniques supérieurs; on pourrait, il me semble, compléter ainsi l'explication qu'il en donne. Il attribue cette propriété de l'organe de l'ouïe principalement au défaut de l'éducation de l'oreille pour ce genre d'exercice et à l'attention que nous portons à la partie objective de nos sensations, et au contraire au défaut d'attention à tout ce qui est subjectif. Mais cette explication est insuffisante; car, avec toute l'attention possible et sans le secours des résonnateurs, il est impossible de percevoir les différents harmoniques qui caractérisent chaque voyelle. Il y a là, dans une certaine mesure, un phénomène analogue à celui que l'on constate dans l'acte de la vision, puisque l'œil, dans aucun cas, ne peut séparer les sensations dues à un mouvement complexe provenant de plusieurs vibrations simples simultanées; pour l'oreille, cette séparation ne devient très-difficile et même impossible, que lorsque les durées des mouvements vibratoires composants sont entre elles comme les nombres 1, 2, 3, 4,.... Cette fusion des harmoniques avec le son fondamental doit donc dépendre de l'organisation même de l'oreille. M. Helmholtz admet que la perception des sons de diverses hauteurs se fait par l'entremise des fibres de Corti, espèces de cordes vibrant chacune pour un son particulier, et à chacune desquelles correspond un filet nerveux. La distribution de ces filets nerveux, provenant de la division du nerf acoustique, ne pourrait-elle pas être faite de telle sorte que les fibres de Corti correspondant à un son donné et à ses harmoniques, fussent reliées à une même région de l'encéphale ou à des cellules nerveuses

communiquant entre elles? C'est aux anatomistes qu'il appartient de vérifier l'exactitude de cette hypothèse.

Pour entendre les harmoniques supérieurs dus à la décomposition d'un mouvement complexe, on a, en général, recours aux résonateurs.

Que se passe-t-il dans ce cas? Que perçoit l'oreille? Les choses se passent évidemment comme pour un faisceau de lumière blanche qui se réfléchit un certain nombre de fois entre deux lames métalliques avant d'arriver à l'œil, et devient ainsi de plus en plus coloré. Le mouvement vibratoire complexe subit, en effet, dans le résonateur des réflexions multiples, par suite desquelles le mouvement résultant qui arrive à l'oreille a changé de nature, et peut être considéré comme dû à la superposition d'un son pendulaire simple très-intense, dont la hauteur correspond aux dimensions du résonateur avec d'autres mouvements vibratoires beaucoup plus faibles; le premier son sera seul perçu.

Ohm, en appliquant le calcul aux expériences de Seebeck, était parvenu, comme je l'ai dit plus haut, à expliquer très-simplement la cause de la perception simultanée de plusieurs sons; mais il n'avait pas traité la question d'une manière générale, avait laissé échapper quelques fautes de calcul, et enfin les intensités calculées par lui pour le second harmonique étaient beaucoup plus considérables que celles que l'on pouvait déduire de la perception des sons dans les expériences de Seebeck.

Ce dernier (*), se fondant surtout sur la différence qui existe entre les intensités calculées pour les harmoniques supérieurs à l'aide de la formule de Fourier et celles que l'oreille leur attribue, n'admit pas le principe de Ohm. Il suppose au contraire que, dans la série de Fourier, à chaque terme supérieur ne correspond pas nécessairement un son perçu isolément, mais que l'ensemble de tous ces termes contribue à augmenter l'impression produite par le son fondamental; la seconde partie de cette conclusion est seule admissible, d'après ce que j'ai dit plus haut; la première doit évidemment être rejetée.

(*) *Sur la sirène*, par Aug. Seebeck (*Ann. Pogg.*, t. LX, p. 449, 1843).

Ohm (*) répondit avec un peu d'aigreur à Seebeck. Complètement dépourvu du sentiment musical et même de la faculté d'apprécier la justesse des sons, il fit faire, dit-il, par un de ses amis quelques expériences à l'aide d'un violon; il constata que si l'on produit un son isolé, puis qu'on y ajoute son octave grave, le premier son cesse complètement d'être entendu; en second lieu, si l'on produit un son grave, d'abord seul, puis accompagné de son octave aiguë, le premier son est notablement renforcé, et, au contraire, le second est entendu faiblement; enfin si l'octave n'est pas très-juste, le même renforcement n'a plus lieu.

Ohm constate le fait sans se charger de l'expliquer; il émet cependant l'hypothèse que cette difficulté d'audition des harmoniques pourrait tenir à la constitution même de l'oreille, et cherche ainsi à détruire les objections soulevées par Seebeck, en admettant, ce que les travaux de M. Helmholtz ont complètement justifié, que l'oreille perçoit très-difficilement les harmoniques en présence de leur son fondamental.

Seebeck (**) répondit encore à Ohm, en maintenant son point de vue, et continuant à nier qu'à chaque terme de la série de Fourier corresponde un son pouvant être perçu isolément. Il multiplia et varia les expériences qu'il avait faites avec la sirène, en changeant la forme et la distance des ouvertures, ainsi que le mode d'insufflation. Il obtint des sons de timbres très-variables, mais il n'a jamais entendu, dit-il, que de très-faibles harmoniques, et en y prêtant la plus grande attention. Ne sachant où trouver, dans la série de Fourier interprétée comme le faisait Ohm, quelque chose qui pût correspondre aux variations du timbre, il pensait que la fonction entière développée ou non en série représentait un son unique d'un timbre variable. Ohm, en effet, ne dit pas un seul mot du timbre des sons, et ne paraît nullement se douter qu'il puisse dépendre, comme l'a fait voir depuis M. Helmholtz, de l'amplitude des harmoniques qui accompagnent le son fondamental, soit réellement, soit virtuellement.

En résumé, on doit reconnaître que Ohm a eu le mérite d'appliquer la série de Fourier, admise depuis longtemps pour représenter les vi-

(*) *Encore quelques mots sur la définition du son musical*, par Ohm (*Ann. Pogg.*, t. LXII, p. 1; 1844).

(**) *Sur la définition du son musical*, par Aug. Seebeck (*Ann. Pogg.*, t. LXIII; nov. 1844).

brations des cordes, à l'étude des sons produits par des chocs discontinus; qu'il a expliqué la perception simultanée de plusieurs sons, fait constaté antérieurement par Seebeck, en admettant qu'à chaque terme de la série de Fourier correspond un son perçu isolément. Si Seebeck a combattu cette manière de voir, c'est qu'il ne pouvait se rendre compte de la difficulté de l'audition des harmoniques, et que de plus il ne pouvait trouver dans la série de Fourier, interprétée comme le faisait Ohm, l'explication du timbre des sons.

Le travail si remarquable de Ohm ne peut plus être considéré comme ayant complètement résolu la question relative aux sons produits par des chocs discontinus et en particulier par la sirène, puisqu'il ne s'est nullement occupé du timbre des sons produits, et qu'il n'a pas traité le problème dans toute sa généralité. Depuis, de nouvelles modifications ont été apportées à la construction de la sirène, de nouvelles recherches ont été faites avec cet instrument; il m'a semblé, par suite, intéressant de reprendre le travail de Ohm, en le généralisant d'abord, puis en traitant divers cas particuliers, qui puissent ensuite être comparés à l'expérience.

Avant de terminer cette introduction, j'indiquerai encore les principaux perfectionnements apportés à la construction de la sirène depuis les travaux de Seebeck.

En 1851, Dove (*) modifia la sirène primitive d'Opelt et de Seebeck, et lui donna la forme de la sirène ordinaire, en perçant le fond de la boîte et le plateau de plusieurs séries d'ouvertures, afin d'obtenir l'accord parfait; la partie la plus ingénieuse de cette sirène est la disposition employée par Dove pour permettre de faire sortir l'air séparément par chaque série d'ouvertures ou par plusieurs à la fois.

Opelt (**), en 1854, a ajouté un nouveau perfectionnement à la sirène qu'il avait imaginée auparavant. Tout en reconnaissant la supériorité de la sirène de Dove sur la sienne, il reproche à celle-ci de ne pouvoir servir à la production que d'un petit nombre de sons. La nouvelle sirène

(*) *Description d'une sirène propre à la production simultanée de plusieurs sons musicaux*, par Dove (*Ann. Pogg.*, t. LXXXII, p. 596; 1851. — *Berliner Bericht*, 1850-51, p. 311).

(**) OPELT, *Théorie générale de la musique, fondée sur le rythme des impulsions sonores, et éclaircie par de nouveaux moyens de démonstration*; Leipzig, 1852 (*Berliner Bericht* sur 1852).

d'Opelt est formée comme la première d'un simple disque de carton muni de plusieurs rangées d'ouvertures, en nombres très-variables; d'abord se trouvent douze rangées circulaires avec 6, 9, 12, 15, 18, 24, 30, 36, 48, 60, 72 et 96 ouvertures, donnant par suite les sons ut_1 , sol_1 , ut_2 , mi_2 , sol_2 , ut_3 , mi_3 , sol_3 , ut_4 , mi_4 , sol_4 , ut_5 .

Dans chacune des rangées suivantes se trouvent des ouvertures dont les distances correspondent à deux progressions arithmétiques différentes, ayant le même point de départ; mais aux points communs aux deux progressions, on ne met qu'une seule ouverture. Enfin les quatre rangées les plus extérieures portent des ouvertures dont les distances forment trois progressions arithmétiques différentes partant du même point, et, comme dans les rangées précédentes, aux points communs à deux ou trois progressions on ne met qu'une seule ouverture. En comptant chaque ouverture commune à plusieurs progressions, de manière que chacune de ces dernières soit complète, les dispositions de ces diverses rangées sont les suivantes :

NUMÉRO de la rangée.	1 ^{re} PROGRESSION.	2 ^e PROGRESSION.	3 ^e PROGRESSION.	NOMBRE total.	SONS SIMULTANÉS.
1	24	30	»	48	4 : 5, ut_1 mi_1
2	24	32	»	48	3 : 4, ut_1 fa_1
3	24	36	»	48	2 : 3, ut_1 sol_1
4	24	40	»	54	3 : 5, ut_1 la_1
5	24	42	»	60	4 : 7, ut_1 si_1^b
6	32	40	48	96	4 : 5 : 6, fa_1 la_1 ut_2
7	30	36	48	96	5 : 6 : 8, mi_1 sol_1 ut_2
8	48	64	80	176	3 : 4 : 5, ut_2 fa_2 la_2
9	48	60	72	114	4 : 5 : 6, ut_2 mi_2 sol_2

Il serait facile d'obtenir un grand nombre d'autres combinaisons. M. Kœnig a construit une grande sirène d'après Seebeck et Opelt, en employant des disques de cuivre percés avec une grande régularité et mis en rotation par un mouvement d'horlogerie; de plus un sommier portant plusieurs tubes permet d'augmenter l'intensité des sons obtenus, en produisant plusieurs ébranlements simultanés, ce qu'on ne pouvait faire avec les appareils primitifs d'Opelt et de Seebeck.

Enfin, M. Helmholtz a ajouté un nouveau et notable perfectionnement à la sirène de Dove, en imaginant la sirène double; dans celle-ci, en effet, on peut produire soit simultanément, soit successivement huit sons différents et toutes leurs combinaisons; on peut obtenir le même accord par deux sons provenant soit de la même boîte, soit des deux boîtes de l'appareil, et enfin produire des battements en faisant tourner à la main la boîte supérieure, pendant que les deux disques sont eux-même en rotation. M. Kœnig a construit une très-grande sirène, d'après ce principe, dans laquelle un fort mouvement d'horlogerie fait tourner les deux disques, et où les diverses séries d'ouvertures peuvent être ouvertes et fermées à l'aide de touches et d'un mécanisme analogue à celui de l'orgue ou du piano. Nul doute que ces dernières sirènes ne reçoivent d'utiles applications pour vérifier les conclusions de l'étude que j'entreprends, celle du timbre des sons produits par les chocs interrompus et en particulier par la sirène.

II. — *Sons produits par des ébranlements isolés tous de même nature.*

Étant donnée une sirène munie d'ouvertures équidistantes, toutes de même forme, on peut calculer l'amplitude absolue ou relative des divers harmoniques qui accompagnent le son fondamental produit, si l'on connaît la fonction qui représente l'intensité de l'ébranlement dû à la sortie de l'air par les ouvertures de la sirène.

La nature de cette fonction dépend de deux éléments, d'un côté de la forme des ouvertures, de l'autre de la variation de la vitesse avec laquelle l'air s'écoule de la boîte de la sirène. Il est difficile, pour ne pas dire impossible, de tenir compte de ce second élément; mais si, comme on le fait habituellement, on prend des ouvertures très-petites par rapport à leurs distances, on peut supposer que l'écoulement de l'air se fait avec une vitesse constante. Du reste, en vue des calculs à effectuer, on est obligé de faire cette hypothèse; la comparaison des résultats obtenus par la théorie avec l'expérience, permettra de vérifier jusqu'à quel point l'hypothèse de l'écoulement uniforme de l'air est admissible.

Avant d'examiner divers cas particuliers, j'exposerai quelques considérations générales sur l'emploi de la série de Fourier.

Soit $F(t)$ une fonction quelconque, Fourier a fait voir que l'on peut toujours poser

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} F(t) &= A_0 + A_1 \cos 2\pi \frac{t}{T} + A_2 \cos 2\pi \frac{2t}{T} + \dots + A_m \cos 2\pi \frac{mt}{T} + \dots \\ &+ B_1 \sin 2\pi \frac{t}{T} + B_2 \sin 2\pi \frac{2t}{T} + \dots + B_m \sin 2\pi \frac{mt}{T} + \dots \end{aligned} \right.$$

Si $F(t)$ est une fonction périodique dont la période est T , il y a identité absolue entre les deux membres; sinon la série ne représente la première fonction qu'entre certaines limites.

On peut encore écrire

$$(2) \quad F(t) = A_0 + \alpha_1 \cos 2\pi \frac{t - p_1}{T} + \dots + \alpha_m \cos 2\pi \frac{mt - p_m}{T} + \dots$$

avec les relations suivantes entre les coefficients de ces deux séries :

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} A_m &= \alpha_m \cos 2\pi \frac{mp_m}{T}, & B_m &= \alpha_m \sin 2\pi \frac{mp_m}{T}, \\ \alpha_m^2 &= A_m^2 + B_m^2 & \tan 2\pi \frac{mp_m}{T} &= \frac{B_m}{A_m}. \end{aligned} \right.$$

Enfin, A_0 , A_m , et B_m sont déterminés par les intégrales définies suivantes :

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} F(t) dt, \\ A_m &= \frac{2}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} F(t) \cos 2\pi \frac{mt}{T} dt, & B_m &= \frac{2}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} F(t) \sin 2\pi \frac{mt}{T} dt. \end{aligned} \right.$$

Les valeurs de A_0 , A_m et B_m , sont évidemment indépendantes de la de la valeur absolue de τ , puisque $F(t)$ est une fonction périodique, dont la période est T ; elles dépendent au contraire de l'origine adoptée pour mesurer le temps, mais α_m en est indépendant; en effet, si l'on change l'origine du temps en la reculant d'une quantité égale à θ ,

$F(t)$ devient $F(t - \theta)$, et l'on a alors

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(t - \theta) = A_0 + \sum_1^{\infty} \left[A_m \cos 2\pi \frac{m(t - \theta)}{T} + B_m \sin 2\pi \frac{m(t - \theta)}{T} \right], \\ \text{ou bien} \\ F(t - \theta) = A_0 + \sum_1^{\infty} \left[\alpha_m \cos 2\pi \frac{m(t - \theta - p_m)}{T} \right], \\ \text{et, en développant,} \\ F(t - \theta) = A_0 + \sum_1^{\infty} \left[\left(A_m \cos 2\pi \frac{m\theta}{T} - B_m \sin 2\pi \frac{m\theta}{T} \right) \cos 2\pi \frac{mt}{T} \right. \\ \left. + \left(A_m \sin 2\pi \frac{m\theta}{T} + B_m \cos 2\pi \frac{m\theta}{T} \right) \sin 2\pi \frac{mt}{T} \right]. \end{array} \right.$$

Or on peut encore écrire

$$(6) \quad F(t - \theta) = A_0 + \sum_1^{\infty} \left(A'_m \cos 2\pi \frac{mt}{T} + B'_m \sin 2\pi \frac{mt}{T} \right);$$

d'où, en identifiant les coefficients des relations (5) et (6), on aura

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} A'_m = A_m \cos 2\pi \frac{m\theta}{T} - B_m \sin 2\pi \frac{m\theta}{T} = \alpha_m \cos 2\pi \frac{m(p_m + \theta)}{T}, \\ B'_m = A_m \sin 2\pi \frac{m\theta}{T} + B_m \cos 2\pi \frac{m\theta}{T} = \alpha_m \sin 2\pi \frac{m(p_m + \theta)}{T}. \end{array} \right.$$

Et enfin, on en conclut

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_m^2 + B_m^2 = A'^2_m + B'^2_m = \alpha_m^2, \\ \tan 2\pi \frac{m(p_m + \theta)}{T} = \frac{B'_m}{A'_m}. \end{array} \right.$$

Les coefficients α_m de la série (2), ou, ce qui revient au même, les amplitudes maxima des divers harmoniques ne dépendent donc pas de l'origine adoptée pour le temps, ce qui était évident *à priori*; la phase seule de chacun de ces sons, au contraire, en dépend. Mais les différences de phases des divers sons en sont également indépendantes, ce qui est évident *à priori*; les mouvements vibratoires sont, en effet, entre eux dans des rapports qui doivent être indépendants du mode de calcul employé.

Par suite, on choisira l'origine du temps dans les divers cas examinés, de telle sorte que le calcul de A_m et de B_m soit le plus simple possible, en particulier de façon que l'un des deux coefficients A_m ou B_m soit nul; si $B_m = 0$, par exemple, on a $\alpha_m = A_m$; il n'y a pas à tenir compte du signe de A_m , puisque ce dernier peut être attribué à la phase, et que l'intensité de l'harmonique correspondant en est indépendante.

Trois cas différents peuvent se présenter dans la détermination de A_m et B_m , quant aux limites des intégrales définies. Supposons que, pour chaque impulsion isolée, l'ébranlement communiqué à l'air soit donné par la fonction $y = \varphi(t)$, et que a en soit la durée :

1° Si $a = T$, représentons $\varphi(t)$ par la courbe AA'B (fig. 1), les limites

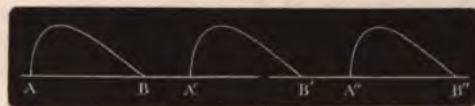
Fig. 1.



des intégrales seront 0 et T ou a , si pour le point A on pose $T = 0$;

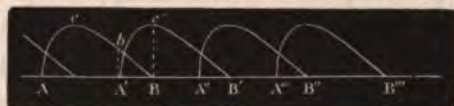
2° Si l'on suppose $a < T$ (fig. 2), les limites de l'intégrale seront naturellement 0 et a , puisque, de a jusqu'à T, $\varphi(t)$ est nul;

Fig. 2.



3° Si l'on suppose $a > T$ (fig. 3), les limites de l'intégrale sont

Fig. 3.



encore 0 et a ; en effet, prenons seulement A_m , on a

$$A_m = \int_0^T F(t) \cos 2\pi \frac{mt}{T} dt;$$

si l'origine du temps est en A',

$$A'A'' = T, \quad A'B' = a;$$

de A' jusqu'à B, il faut faire la somme des aires A'Bb et A'c'B, ce qui donnera

$$A_m = \int_0^T \varphi(t) \cos 2\pi \frac{mt}{T} dt + \int_T^a \varphi(t) \cos 2\pi \frac{mt}{T} dt,$$

et, par suite,

$$A_m = \int_0^a \varphi(t) \cos 2\pi \frac{mt}{T} dt.$$

Donc, les limites des intégrales qui déterminent A_m et B_m sont les mêmes, quelle que soit la valeur de a , ou de la durée de l'ébranlement par rapport à la période du mouvement vibratoire, ou, ce qui revient au même, quelle que soit la grandeur des ouvertures relativement à leur distance.

Si $F(t)$ est le même pour les valeurs positives et négatives de t , et si, de plus, on prend l'origine au milieu de l'intervalle pendant lequel $F(t)$ n'est pas nul, on a

$$(9) \quad \begin{cases} B_m = \frac{2}{T} \int_{-e}^{+e} F(t) \sin 2\pi \frac{mt}{T} dt = 0, \\ A_m = \frac{2}{T} \int_{-e}^{+e} F(t) \cos 2\pi \frac{mt}{T} dt = \frac{4}{T} \int_0^e F(t) \cos 2\pi \frac{mt}{T} dt = \alpha_m. \end{cases}$$

Il en sera de même si $F(t)$ ayant deux formes différentes pour les valeurs positives et négatives de t , $f_1(t)$ et $f_2(t)$, on a

$$f_1(-t) = f_2(t),$$

cas qui se rencontre assez souvent.

Si les ouvertures par lesquelles l'air s'échappe sont très-éloignées relativement à leurs dimensions, quelle que soit leur forme, B_m devient très-petit par rapport à A_m ; soient, en effet, d la distance de deux points semblablement placés dans deux ouvertures voisines, et v la vitesse de déplacement du disque mobile dans la partie où se trouvent placées les ouvertures, on aura

$$t = \frac{x}{v}, \quad T = \frac{d}{v};$$

donc

$$(10) \quad \begin{cases} A_m = \frac{2}{d} \int_0^a F\left(\frac{x}{v}\right) \cos 2\pi \frac{mx}{d} dx, & B_m = \frac{2}{d} \int_0^a F\left(\frac{x}{v}\right) \sin 2\pi \frac{mx}{d} dx, \\ A_0 = \frac{1}{d} \int_0^a F\left(\frac{x}{v}\right) dx. \end{cases}$$

Si d est très-grand relativement à a , on aura, en remplaçant le cosinus et le sinus par les premiers termes de leur série,

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{2}{d} \int_0^a F\left(\frac{x}{v}\right) dx = 2A_0, \\ B_m &= \frac{2\pi m}{d^2} \int_0^a x F\left(\frac{x}{v}\right) dx = 0. \end{aligned}$$

B_m est donc infiniment petit par rapport à A_m , et ce dernier tend à devenir constant, indépendant de m et égal à $2A_0$.

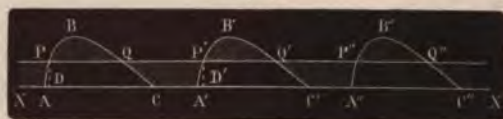
Par suite, quelle que soit la forme des ouvertures par lesquelles s'écoule l'air, quand elles sont très-éloignées par rapport à leurs dimensions, les amplitudes de tous les harmoniques tendent à devenir égales à celles du son fondamental, c'est-à-dire que le rapport $\frac{A_m}{A_1}$, toujours plus petit que 1, tend vers l'unité pour $\frac{a}{d} = 0$.

Nous nous occuperons plus tard de la limite vers laquelle tend ce rapport $\frac{A_m}{A_1}$, quand chaque ébranlement se compose de deux parties, pendant lesquelles les mouvements vibratoires et les condensations sont de sens contraires.

Comme on suppose que, pendant toute la durée de l'ébranlement, les déplacements et les condensations ont lieu dans le même sens, jamais on ne peut avoir $A_0 = 0$; or ce terme constant ne donne naissance à aucun son; il est proportionnel au volume d'air sorti de la sirène et exprime pour une vibration la condensation moyenne qui en résulte dans l'air extérieur. Or il est évident que la fonction $F(t) - A_0$ doit produire le même son musical, la même impression sur l'oreille que la fonction $F(t)$ toute seule. Soit donc construite la courbe $y = F(t)$, ABC, A'B'C', A''B''C''... (fig. 4), avec $AA' = CC' = A'A'' = \dots = T$;

menons une parallèle PQ'' à la droite AC'' , à une distance $y_1 = A_0 = PD$; si l'on prend cette droite comme ligne des abscisses, la courbe figurative du mouvement représenté par la fonction $F(t) - A_0$ devient

Fig. 4.



$PBQCA'P'B'Q'C' \dots$; on peut, dès lors, considérer les parties PBQ , $P'B'Q'$, $P''B''Q''$, ... comme correspondant à la condensation, et, au contraire, $QCA'P'$, $Q'C'A''P''$, ... comme représentant la dilatation.

Quelle que soit la fonction $F(t)$, il est facile de démontrer que les aires PBQ et $QCA'P'$ sont égales entre elles; en effet, on a

$$A_0 T = \int_0^T F(t) dt = \text{aire } ABC;$$

mais, comme par construction $PD = A_0$, on a également

$$A_0 T = \text{aire } PDD'P'.$$

Donc

$$\text{aire } ABC = \text{aire } PDD'P' = \text{aire } APP'A'.$$

Si, de part et d'autre, on retranche l'aire $APQC$, il restera

$$\text{aire } PBQ = \text{aire } QCA'P'.$$

C. Q. F. D.

Donc, si l'on produit un son par des chocs séparés les uns des autres et donnant naissance à des déplacements des molécules d'air dans un seul sens (ce qui a lieu dans la sirène et même, en réalité, dans la plupart des instruments à vent, puisque l'air insufflé s'écoule avec une vitesse périodique par le tuyau ébranlé), on peut séparer l'ébranlement communiqué à l'air ambiant en deux parties: la première consiste en un déplacement réel de l'air, qui se propage plus ou moins loin, ne produit aucun effet sur l'oreille, et correspond au terme A_0 ; la deuxième constitue la seule partie efficace du son perçu; elle se divise elle-même en deux périodes pendant lesquelles les molécules d'air ont des mouvements égaux et de sens inverse; la condensation et la dilatation totales sont égales entre elles, de même que

si le son était produit par un corps solide vibrant; ces deux périodes peuvent, du reste, avoir des durées inégales, et suivre des lois différentes.

Du reste, la même conclusion ressort de l'examen de la série de Fourier; car, si l'on retranche le premier terme constant A_0 , chacun des termes variables passe par un même nombre de valeurs positives et négatives; donc il doit en être de même de leur somme.

Le timbre du son produit ou, ce qui revient au même, l'amplitude relative des harmoniques supérieurs ne peut donc dépendre que des durées relatives des deux périodes dans lesquelles se décompose tout ébranlement communiqué à l'air, quel que soit le mode employé pour le produire, et de la forme de la fonction qui représente chacune de ces périodes. Le mode de production de l'ébranlement étant déterminé, c'est-à-dire la forme des courbes ABC, A'B'C', ... (*fig. 4*) étant donnée, qui se répètent périodiquement, on peut en faire varier la distance AA' dans de grandes limites. Pour quelle distance, le son produit se rapprochera-t-il le plus possible d'un son pendulaire? Il faut, pour cela,

étudier la fonction $\frac{\alpha_m}{\alpha_1}$; or, comme on le verra plus tard, dans les divers cas particuliers étudiés, cette fonction, égale à 1 quand les ouvertures sont à une distance très-grande par rapport à leurs dimensions, n'atteint pas son minimum en même temps pour les divers harmoniques; mais, le plus souvent, le deuxième harmonique l'emporte sur les autres; on pourra donc chercher quelle doit être la distance AA' pour que le rapport $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ soit minimum. Or on constate que, dans la plupart des cas,

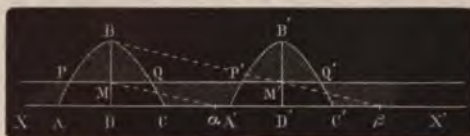
$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ est voisin de son minimum quand les deux périodes dans lesquelles l'ébranlement se décompose ont des durées égales, c'est-à-dire quand $PQ = QP' = P'Q' = Q'P'' = \dots$ (*fig. 4*). C'est dans ce cas, en effet, que le son produit doit se rapprocher autant qu'il est possible d'un son pendulaire, puisque l'égalité des deux périodes du mouvement vibratoire est une des conditions de l'existence de ce genre de sons.

Je vais passer à l'examen des divers cas particuliers qui peuvent se présenter le plus souvent dans la construction de la sirène.

1. *Ébranlements isolés formés d'une seule des deux parties d'un son pendulaire.* — Supposons une suite d'ébranlements isolés et formés uni-

quement de la partie condensée ou dilatée d'un son pendulaire : c'est le cas unique traité par Ohm; mais on peut simplifier la marche qu'il a suivie et les notations qu'il a adoptées. Il est facile de réaliser ce mode d'ébranlements, en prenant une sirène dont le fond porterait des ouvertures rectilignes étroites dirigées suivant les rayons et dont le disque mobile serait muni, sur son bord, d'entailles en forme de demi-sinusoïdes, telles que ABC (*fig. 5*), en admettant toutefois, comme je l'ai déjà fait

Fig. 5.



remarquer, que la pression reste constante dans la boîte pendant toute la durée de l'écoulement, et que l'ébranlement communiqué à l'air extérieur soit proportionnel à la surface de l'ouverture par laquelle l'air s'échappe.

Soit $\omega = AC$ (*fig. 5*) la durée de l'ébranlement; $AA' = T$ la période totale qui sépare le commencement de deux ébranlements successifs.

Plaçons l'origine du temps en D; alors, de $t = -\frac{\omega}{2}$ à $t = +\frac{\omega}{2}$, $F(t) = ka \cos \frac{\pi t}{\omega}$, et, de $t = \frac{\omega}{2}$ à $t = T - \frac{\omega}{2}$, $F(t) = 0$. On aura donc

$$A_m = \frac{2a}{T} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{+\frac{\omega}{2}} \cos \pi \frac{t}{\omega} \cos 2\pi \frac{mt}{T} dt = \frac{4aT\omega}{\pi(T^2 - 4m^2\omega^2)} \cos \pi \frac{m\omega}{T},$$

$$B_m = 0,$$

$$A_0 = \frac{a}{T} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{+\frac{\omega}{2}} \cos \pi \frac{t}{\omega} dt = \frac{2a\omega}{\pi T}.$$

Donc

$$(12) \quad \alpha_m = A_m = \frac{4a\frac{\omega}{T}}{\pi\left(1 - 4m^2\frac{\omega^2}{T^2}\right)} \cos \pi \frac{m\omega}{T}.$$

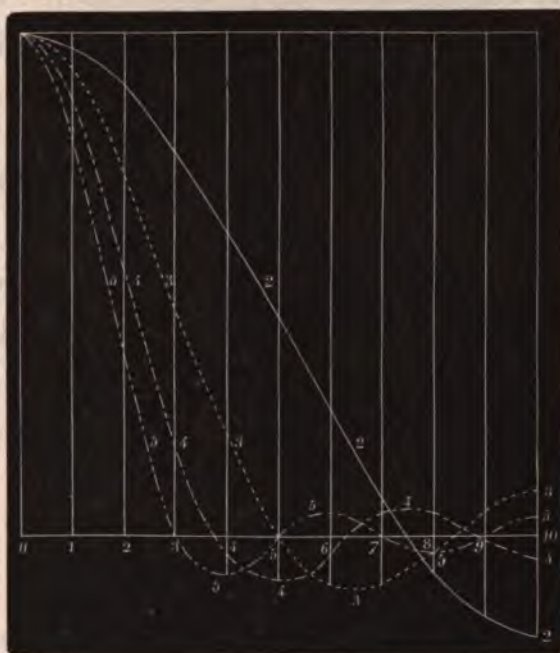
Menons la droite PQ parallèlement à XX' (*fig. 5*), et à une distance

MD égale à A_0 ; $D\alpha = \omega$, $D\beta = \frac{\pi}{2} T$. Le mouvement vibratoire produit pourra être représenté par la courbe PBQCA'P', répétée périodiquement, conformément à ce qui a été dit page 286. Pour connaître le timbre des sons produits, on étudiera la forme de la fonction $\frac{\alpha_m}{\alpha_1}$, qui est égale à

$$\gamma = \frac{\cos \pi m \frac{\omega}{T}}{\cos \pi \frac{\omega}{T}} \frac{1 - 4 \frac{\omega^2}{T^2}}{1 - 4 m^2 \frac{\omega^2}{T^2}} = \frac{\cos \pi m x}{\cos \pi x} \frac{1 - 4 x^2}{1 - 4 m^2 x^2},$$

en posant $\frac{\omega}{T} = x$. Dans la *fig. 6* se trouvent construites les valeurs de γ ,

Fig. 6.



pour $m = 1, 2, 3, 4, 5$, et en faisant varier $\frac{\omega}{T}$ de 0 à 1; j'ai représenté de la même manière les valeurs des cinq premiers harmoniques dans la plupart des cas que j'ai examinés. On voit d'abord que :

1° Pour $\frac{\omega}{T} = 0$, $\gamma = 1$, quel que soit m ; de plus $\frac{d\gamma}{dx} = 0$.

2° Pour $m \frac{\omega}{T} = \frac{2k+1}{2}$, $y = 0$, sauf pour $k = 0$; car alors $y = \frac{0}{0}$ et n'est pas nul. Ainsi y sera nul :

Pour $m = 2$, si $\frac{\omega}{T} = \frac{3}{4} = 0,75$;

Pour $m = 3$, si $\frac{\omega}{T} = \frac{1}{2}, \frac{5}{6} = 0,5 - 0,833\dots$;

Pour $m = 4$, si $\frac{\omega}{T} = \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8} = 0,375 - 0,625 - 0,875$;

Pour $m = 5$, si $\frac{\omega}{T} = \frac{3}{10}, \frac{5}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10} = 0,3 - 0,5 - 0,7 - 0,9$.

On voit donc que les amplitudes relatives des divers harmoniques, toutes égales à 1 pour $\frac{\omega}{T} = 0$, décroissent d'autant plus vite que m est plus élevé, et ensuite s'écartent peu de zéro, quoique passant par une série de maxima successifs, positifs ou négatifs de plus en plus faibles.

3° Pour $\frac{\omega}{T} = \frac{3}{4}$, le deuxième harmonique est nul, les autres sont assez faibles; on aura donc un son presque simple pour cette valeur.

4° Si l'on veut chercher pour quelle valeur de $\frac{\omega}{T}$, les deux périodes PQ et QP' (*fig. 5*) du mouvement vibratoire sont égales en durée, on aura à résoudre l'équation transcendante

$$\frac{2\omega}{\pi T} = \cos \frac{\pi T}{4\omega},$$

ou, en posant $\frac{\pi T}{2\omega} = x$,

$$\frac{1}{x} = \cos \frac{x}{2}.$$

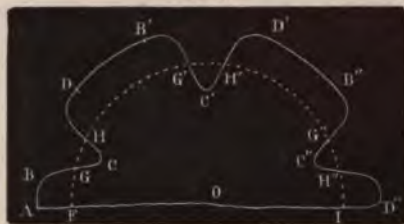
Parmi les diverses racines, une seule convient, $x = 2,198$; ce qui donne

$$\frac{T}{\omega} = 1,395 \quad \text{ou} \quad \frac{\omega}{T} = 0,716 = \frac{5}{7} \text{ approximativement,}$$

valeur peu différente de $\frac{\omega}{T} = 0,75$ ou $\frac{3}{4}$ pour laquelle $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 0$, c'est-à-dire pour laquelle le deuxième harmonique est nul.

II. *Ébranlements produits par une sirène dont le disque porte des entailles en forme de sinusoïdes, et la boîte des fentes rectilignes.* — Supposons que le fond de la boîte d'une sirène porte des fentes rectilignes étroites dirigées suivant des rayons et que le bord du disque mobile soit découpé par des entailles en forme de sinusoïdes entières, construites en prenant pour abscisses des arcs, et des ordonnées dirigées suivant les rayons du disque. Soit ABCDB'C'D' (fig. 7) une portion de

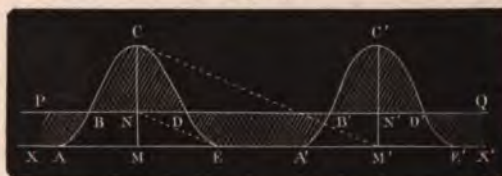
Fig. 7.



ce disque; dans le cas précédent le disque aurait dû être limité à la ligne FGHG'H'G''H''... On pourrait encore mieux réaliser ce mode d'ébranlement, comme l'a proposé M. Kœnig, en pratiquant des fentes rectilignes suivant les génératrices de la surface latérale d'un cylindre, et entourant ce dernier d'une autre surface cylindrique mobile autour de leur axe commun, et dont le bord présenterait la forme d'une sinusoïde enroulée sur un cylindre.

Soient ABCDE, A'B'C'D'E'... (fig. 8) les courbes figuratives des impulsions communiquées à l'air ambiant; AE = ω en représente la durée,

Fig. 8.



et AA' = T la période totale; on aura, en posant CM = a, et prenant l'origine du temps en M,

$$F(t) = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos 2\pi \frac{t}{\omega}, \quad \text{de } t = -\frac{\omega}{2} \text{ à } t = +\frac{\omega}{2},$$

et

$$F(t) = 0, \quad \text{de } t = \frac{\omega}{2} \text{ à } t = T - \frac{\omega}{2};$$

par suite,

$$A_0 = \frac{a}{2T} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{+\frac{\omega}{2}} \left(1 + \cos 2\pi \frac{t}{\omega}\right) dt = \frac{a\omega}{2T},$$

$$A_m = \frac{a}{T} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{+\frac{\omega}{2}} \left(1 + \cos 2\pi \frac{t}{\omega}\right) \cos 2\pi \frac{mt}{T} dt = \frac{aT^2}{m\pi(T^2 - m^2\omega^2)} \sin \pi \frac{m\omega}{T},$$

$$B_m = \frac{a}{T} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{+\frac{\omega}{2}} \left(1 + \cos 2\pi \frac{t}{\omega}\right) \sin 2\pi \frac{mt}{T} dt = 0.$$

Donc, on aura

$$(13) \quad \alpha_m = A_m = \frac{a}{m\pi \left(1 - \frac{m^2\omega^2}{T^2}\right)} \sin \pi \frac{m\omega}{T}.$$

Comme dans le cas précédent, si l'on mène PQ parallèlement à XX' (*fig. 7*) à une distance $MN = A_0 = \frac{a\omega}{2T}$, ($MM' = T$, $MC = a$, $ME = \frac{\omega}{2}$) les courbes BCD, B'C'D' représenteront la période de condensation du mouvement vibratoire et DEA'B'... la période de dilatation.

Le rapport $\frac{\alpha_m}{\alpha_1}$ est égal à

$$\frac{\sin \pi \frac{m\omega}{T}}{\sin \pi \frac{\omega}{T}} \frac{1 - \frac{\omega^2}{T^2}}{m \left(1 - \frac{m^2\omega^2}{T^2}\right)} \quad \text{ou} \quad \gamma = \frac{\sin \pi mx}{\sin \pi x} \frac{1 - x^2}{m(1 - m^2x^2)}.$$

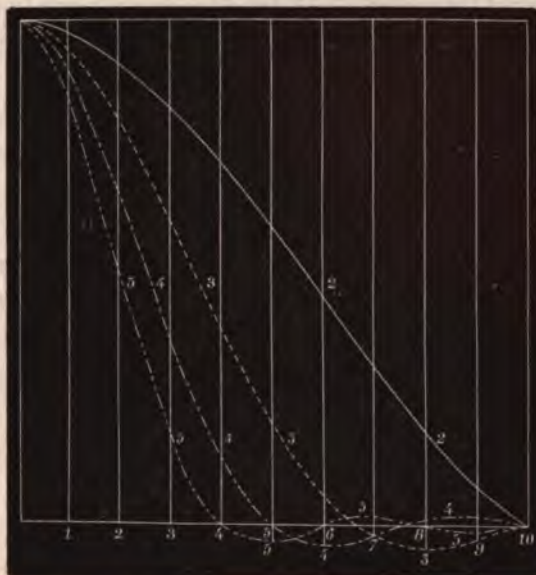
Dans la *fig. 9*, se trouvent construites les valeurs de $\frac{\alpha_m}{\alpha_1}$ pour $m = 2, 3, 4, 5$; on peut remarquer que :

1° Pour $x = 0$, $\gamma = 1$, et $\frac{d\gamma}{dx} = 0$.

2° Pour $x = 1$, $\alpha_m = 0$, sauf pour α_1 , qui est égal à $\frac{0}{0}$ et en réalité est

égal à $\frac{a}{2}$; le son est donc, dans ce cas, un son pendulaire parfaitement pur; de plus, pour $x = 1$, $\frac{dy}{dx} = 0$.

Fig. 9.



3° Pour que y soit nul, il faut qu'on ait $mx = k$, k étant différent de 1, car alors $y = \frac{0}{0}$, et n'est pas nul. Donc pour les courbes construites, on aura $y = 0$:

Pour $m = 2$, si $\frac{\omega}{T} = 1$;

Pour $m = 3$, si $\frac{\omega}{T} = \frac{2}{3}, 1$;

Pour $m = 4$, si $\frac{\omega}{T} = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$;

Pour $m = 5$, si $\frac{\omega}{T} = \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$.

4° Pour que les deux périodes BD et DB' (fig. 8) dans lesquelles se divise l'ébranlement soient de même durée, il faut que $\frac{\omega}{T}$ soit égal à l'une

des racines de l'équation transcendante $\frac{\omega}{T} = 1 + \cos \frac{\pi T}{2\omega}$, qui est satisfaite pour $\frac{\omega}{T} = 1$; les autres racines sont étrangères à la question. Il était facile de prévoir le résultat auquel on devait arriver.

5° En examinant les courbes construites, on voit que le deuxième harmonique n'est jamais nul et l'emporte sur tous les autres; ces derniers, à partir de $x = 0$, décroissent d'autant plus rapidement que leur rang est plus élevé; on n'entendra donc, en général, que le deuxième harmonique, à moins que les entailles ne soient très-écartées, relativement à leurs dimensions.

III. *Sons produits par une sirène dont la boîte porte des fentes étroites suivant des rayons, et le disque des ouvertures rectangulaires.* — Supposons que le fond de la boîte d'une sirène porte des fentes étroites dirigées suivant des rayons, et le disque des ouvertures rectangulaires, en admettant que le disque soit d'un assez grand diamètre.

Soient ABCD, A'B'C'D', ... (fig. 10) les ouvertures rectangulaires

Fig. 10.



du disque; MN, M'N', ... les fentes étroites de la boîte. Posons

$$AB = A'B' = \dots = b, \quad AD = A'D' = \dots = a, \quad AA' = d;$$

soient ensuite v la vitesse de déplacement du disque dans la partie où sont percées les ouvertures, et h la largeur des fentes étroites; en représentant par T la durée d'une vibration, et par ω celle de l'ébranlement, on aura

$$T = \frac{d}{v}, \quad \omega = \frac{b}{v}.$$

Par suite,

$$F(t) = kah, \quad \text{de } t = -\frac{\omega}{2} \text{ à } t = +\frac{\omega}{2},$$

en plaçant l'origine au milieu de AB, et

$$F(t) = 0, \text{ de } t = \frac{\omega}{2} \text{ à } t = T - \frac{\omega}{2}.$$

La courbe figurative du mouvement vibratoire serait donc ADCB,

Fig. 11.



A'D'C'B',... (fig. 11). On aura donc

$$A_0 = \frac{kah}{T} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{+\frac{\omega}{2}} dt = \frac{kah\omega}{T} = \frac{kahb}{d} = \frac{ksh}{d}$$

(en représentant par $s = ab$ l'aire de chaque ouverture rectangulaire),

$$A_m = \frac{2kah}{T} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{+\frac{\omega}{2}} \cos 2\pi \frac{mt}{T} dt = \frac{2kah}{\pi} \frac{\sin \pi \frac{mb}{d}}{m},$$

$$B_m = \frac{2kah}{T} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{+\frac{\omega}{2}} \sin 2\pi \frac{mt}{T} dt = 0.$$

Donc

$$(14) \quad \alpha_m = A_m = \frac{2kah}{\pi} \frac{\sin \pi \frac{mb}{d}}{m}.$$

Si l'on mène la droite MNM'N' à une distance de XX' égale à $A_0 = \frac{ksh}{d}$ (fig. 12), (AB = b, AA' = d, AD = kah), les parties MDCN, M'D'C'N',... représenteront la période de condensation du mouvement, et NBA'M',... la période de dilatation.

Le rapport $\frac{\alpha_m}{\alpha_1}$ est égal à

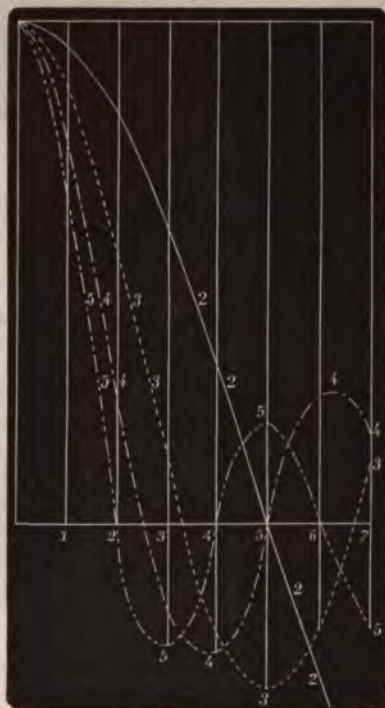
$$r = \frac{\sin \pi \frac{mb}{d}}{m \sin \pi \frac{b}{d}} = \frac{\sin \pi mx}{m \sin \pi x}.$$

La *fig. 12* représente les courbes construites d'après les valeurs de y pour $m = 2, 3, 4, 5$. On voit que :

1° Pour $x = 0$, $y = 1$ et $\frac{dy}{dx} = 0$.

2° Pour $x = 1$, on a également $y = \pm 1$; mais dans ce cas, si l'on cherche séparément α_m et α_1 , on les trouve également nuls comme pour

Fig. 12.



$x = 0$; en effet, si les ouvertures rectangulaires sont en contact les unes avec les autres, évidemment il n'y a plus de son produit.

3° Si m est pair, le point $x = \frac{1}{2}$ est un centre de figure; pour $x = \frac{1}{2} \pm x'$, y a des valeurs égales et de signes contraires; si au contraire m est impair, les deux valeurs correspondantes de y sont égales et de mêmes signes. Comme les signes n'ont aucune importance pour l'intensité des harmoniques, on voit que, si l'on remplace dans une sirène ainsi construite les vides par les pleins et réciproquement, le

timbre du son ne changera pas. En effet, les deux courbes qui représentent la condensation et la dilatation (*fig. 11*) ont la même forme; par conséquent, on peut remplacer l'une par l'autre, la nature du son produit doit rester exactement la même.

4° Pour qu'un harmonique fasse défaut, il faut qu'on ait

$$\sin \pi m x = 0, \quad \text{ou} \quad m x = k, \quad \text{ou} \quad x = \frac{k}{m},$$

ce qui donne, pour les cinq premiers harmoniques, $y = 0$:

$$\text{Pour } m = 2, \quad \text{si } x = \frac{1}{2};$$

$$\text{Pour } m = 3, \quad \text{si } x = \frac{1}{3}, \frac{2}{3};$$

$$\text{Pour } m = 4, \quad \text{si } x = \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4};$$

$$\text{Pour } m = 5, \quad \text{si } x = \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}.$$

5° Pour que les deux périodes du mouvement vibratoire aient la même durée, il faut qu'on ait

$$\omega = \frac{T}{2}, \quad \text{ou} \quad b = \frac{d}{2},$$

c'est-à-dire que l'écartement des ouvertures soit égal à leur largeur, ce qui est évident. Dans ce cas, le second harmonique est nul avec tous les harmoniques pairs; les harmoniques impairs, au contraire, atteignent un maximum relatif encore assez considérable, car pour $m = 3$ on trouve

$$y = \frac{1}{3},$$

pour $m = 5$

$$y = \frac{1}{5},$$

en général pour le $m^{\text{ème}}$

$$y = \frac{1}{m},$$

m étant impair.

IV. *Deux ouvertures rectangulaires glissant l'une devant l'autre.* — Supposons que le fond de la boîte ainsi que le disque portent des ouvertures rectangulaires égales. Soient $AD=a$, $AB=b$ (*fig. 13*),

Fig. 13.



la hauteur et la largeur de chaque ouverture; $AA'=d$ la distance de deux ouvertures successives, et v la vitesse du disque mobile dans la région où se trouvent les ouvertures. Prenons l'origine du temps au moment où les ouvertures coïncident, et soit $x = AE = A'E' = vt$ la

Fig. 14.



distance d'un des bords des ouvertures mobiles au bord correspondant des ouvertures fixes.

On pourra poser (*fig. 14*)

$$F(t) = k \times BCHE = ka(b-x), \text{ de } x=0 \text{ à } x=b, \text{ ou bien de } t=0 \text{ à } t=\frac{b}{v};$$

pour les valeurs négatives de t (*fig. 13*), on aura

$$F(t) = k \times AFGD = ka(b+x), \text{ de } x=-b \text{ à } x=0, \text{ ou de } t=-\frac{b}{v} \text{ à } t=0.$$

Si l'on construit les courbes représentées par $F(t)$, on obtient les

Fig. 15.



deux droites AC et BC (*fig. 15*), OA étant égal à b , et OC à kab . On

aura donc dans ce cas :

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{ka}{vT} \left[\int_{-b}^0 (b+x) dx + \int_0^b (b-x) dx \right] = \frac{2ka}{d} \int_0^b (b-x) dx \\ &= \frac{kab^2}{d} = \frac{kab}{d}, \text{ en posant } ab = s; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{2ka}{vT} \left[\int_{-b}^0 (b+x) \cos 2\pi \frac{mx}{d} dx + \int_0^b (b-x) \cos 2\pi \frac{mx}{d} dx \right] \\ &= \frac{4ka}{d} \int_0^b (b-x) \cos 2\pi \frac{mx}{d} dx \\ &= \frac{2kad}{\pi^2} \frac{\sin^2 \pi \frac{mb}{d}}{m^2}; \end{aligned}$$

$$B_m = 0.$$

Donc, on aura

$$(15) \quad \alpha_m = A_m = \frac{2kad}{\pi^2} \frac{\sin^2 \pi \frac{mb}{d}}{m^2}.$$

Menons la droite DD' à une distance de XX' égale à $A_0 = \frac{kab^2}{d} = \frac{OC \times b}{d}$, en posant (*fig. 15*) $OC = kab$, $OB = b$, $OO' = d$; la courbe figurative du mouvement se ramène à une série de triangles DCE, D'C'E',... pour la période condensée et à une série de trapèzes tels que EBA'D',... pour la période dilatée. Cette figure est relative seulement au cas où l'on a $\frac{b}{d} < \frac{1}{2}$ ou $d > 2b$. Si, au contraire, on avait $d < 2b$, il n'y aurait aucune interruption dans la sortie de l'air. Dans ce cas, les deux

Fig. 16.



triangles ont une partie commune A'MB (*fig. 16*); dans cette partie, il faut sommer les ordonnées, ce qui donne la droite HI. La courbe figu-

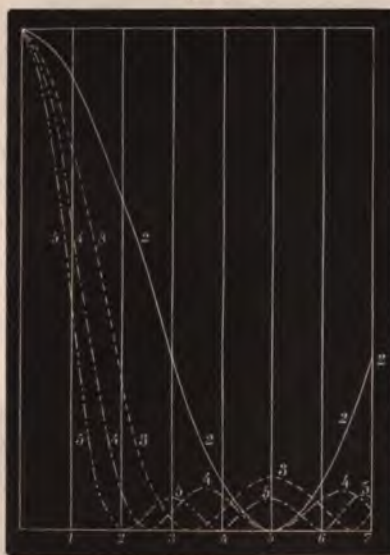
rative du mouvement devient donc la ligne brisée DCEIHD'C'E'I'H',..., en apparence très-différente de celle de la figure précédente; mais si l'on mène la droite DE' parallèle à XX' à une distance $OP = A_0$, on obtient comme précédemment, pour la période condensée, une série de triangles DCE, D'C'E',... et pour la période dilatée des trapèzes tels que EIHD,....

Le rapport $\frac{\alpha_m}{\alpha_1}$ est égal à

$$y = \frac{\sin^2 \pi \frac{mb}{d}}{m^2 \sin^2 \pi \frac{b}{d}} = \frac{\sin^2 \pi mx}{m^2 \sin^2 \pi x}.$$

Les valeurs de ce rapport sont donc les carrés de celles du même rapport dans le cas précédent; on pourra donc faire à peu près les mêmes remarques : les courbes construites (*fig. 17*) sont un peu différentes; elles ne font que toucher la ligne des abscisses et se relèvent

Fig. 17.



au-dessus. Par suite, la droite parallèle à l'axe des y menée par le point $x = \frac{1}{2}$ est un diamètre pour toutes les courbes. Pour une même

valeur de x , la valeur de y sera plus faible que dans le cas précédent, et, par suite, les harmoniques supérieurs sont, en général, moins intenses. Évidemment, pour $x = 1$, on a également $\alpha_m = 0$.

Il n'est pas aussi facile de se rendre compte que précédemment de la symétrie des courbes, ou, si l'on veut, de la raison pour laquelle les rapports $\frac{b}{d}$ et $1 - \frac{b}{d}$ donnent les mêmes valeurs pour $\frac{\alpha_m}{\alpha_1}$. Supposons d'abord le facteur $ka = 1$; car il n'influe que sur l'intensité absolue de tous les sons simultanés, et non sur la valeur relative des divers harmoniques. Cela posé, si l'on prend deux cas correspondant à deux valeurs $\frac{b}{d}$ et $\frac{b'}{d'}$, en admettant $\frac{b'}{d'} = 1 - \frac{b}{d}$, les courbes $y = A_0$ seront semblables, et, par suite, correspondront à deux sons de même timbre.

En effet, étant posé $ka = 1$ avec $\frac{b}{d} < \frac{1}{2}$ (fig. 15), on a

$$OC = b, \quad OB = b \quad \text{et} \quad OP = A_0 = \frac{b^2}{d};$$

dans le triangle DCE :

$$\text{Base} \dots \dots \dots DE = 2b \left(1 - \frac{b}{d}\right),$$

$$\text{Hauteur} \dots \dots \dots CP = b \left(1 - \frac{b}{d}\right);$$

dans le trapèze EBA'D' :

$$\text{Bases} \dots \dots \dots \begin{cases} BA' = d \left(1 - \frac{2b}{d}\right), \\ AD' = d \left[1 - \frac{2b}{d} \left(1 - \frac{b}{d}\right)\right], \end{cases}$$

$$\text{Hauteur} \dots \dots \dots A_0 = \frac{b^2}{d}.$$

Si, au contraire, on suppose $\frac{b}{d} = \frac{b'}{d'} > \frac{1}{2}$, on aura (fig. 16), dans le triangle DCE :

$$\text{Base} \dots \dots \dots DE = 2b' \left(1 - \frac{b'}{d'}\right),$$

$$\text{Hauteur} \dots \dots \dots CP = b' \left(1 - \frac{b'}{d'}\right);$$

et, dans le trapèze EIHD' :

$$\begin{aligned} \text{Bases} \dots & \left\{ \begin{aligned} \text{ED}' &= d' \left[1 - \frac{2b'}{d'} \left(1 - \frac{b'}{d'} \right) \right], \\ \text{HI} &= \text{A}'\text{B} = 2d' \left(\frac{2b'}{d'} - 1 \right), \end{aligned} \right. \\ \text{Hauteur} \dots \text{IR} &= \text{A}_s - \text{IA}' = d' \left(1 - \frac{b'}{d'} \right)^2. \end{aligned}$$

Or, si l'on admet $\frac{b}{d} = 1 - \frac{b'}{d'}$, on aura pour toutes ces lignes (*fig. 13*),
avec $\frac{b}{d} < \frac{1}{2}$, pour le triangle DBE :

$$\begin{aligned} \text{Base} \dots \dots \text{DE} &= \frac{2bb'}{d'}, \\ \text{Hauteur} \dots \text{CP} &= \frac{bb'}{d'}; \end{aligned}$$

pour le trapèze ED'A'B :

$$\begin{aligned} \text{Bases} \dots \dots \left\{ \begin{aligned} \text{A}'\text{B} &= d \left(1 - \frac{2b}{d} \right), \\ \text{ED}' &= d \left(1 - \frac{2bb'}{dd'} \right), \end{aligned} \right. \\ \text{Hauteur} \dots \text{A}_s &= \frac{b^2}{d}; \end{aligned}$$

et, dans la *fig. 16*, avec $\frac{b}{d} > \frac{1}{2}$, pour le triangle DCE :

$$\begin{aligned} \text{Base} \dots \dots \text{DE} &= \frac{2bb'}{d}, \\ \text{Hauteur} \dots \text{CP} &= \frac{bb'}{d}; \end{aligned}$$

et, pour le trapèze ED'HI :

$$\begin{aligned} \text{Bases} \dots \dots \left\{ \begin{aligned} \text{ED}' &= d' \left(1 - \frac{2bb'}{dd'} \right), \\ \text{HI} &= d' \left(1 - \frac{2b}{d} \right), \end{aligned} \right. \\ \text{Hauteur} \dots \text{IR} &= \frac{b^2 d'}{d^2}. \end{aligned}$$

On voit donc que l'on passera de la *fig.* 15 à la *fig.* 16, en multipliant toutes les longueurs par le rapport $\frac{d'}{d}$. Les deux courbes étant semblables, on doit obtenir, dans ces deux cas, des sons jouissant du même timbre, mais avec des intensités absolues différentes. *On pourra donc, comme dans le cas précédent, remplacer les pleins par les vides et réciproquement, sans que la nature du son obtenu change.* Les mêmes harmoniques sont nuls pour les mêmes valeurs de $\frac{b}{d}$ que dans le cas précédent.

Pour que les deux périodes du mouvement vibratoire aient la même durée, il faut que l'on ait

$$DE = ED' = \frac{d}{2} \quad \text{ou bien} \quad \frac{2b(d-b)}{d} = \frac{d}{2},$$

ce qui conduit à l'équation

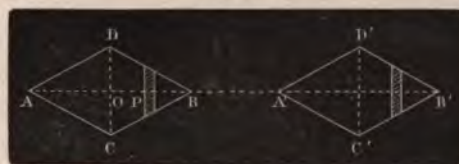
$$\left(\frac{b}{d} - \frac{d}{2}\right)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{b}{d} = \frac{1}{2};$$

pour cette valeur, en effet, on a un son peu différent d'un son pendulaire, puisque le deuxième harmonique, avec tous les harmoniques pairs et tous les harmoniques impairs, quoique atteignant un minimum relatif, sont encore assez faibles.

V. *Ouvertures en forme de losange sur le disque et fentes étroites sur la boîte.* — Supposons que dans une sirène le fond de la boîte soit muni de fentes étroites, et le disque d'ouvertures en forme de losange.

Soient $AB = b$ et $CD = a$ (*fig.* 18) les deux diagonales de chaque

Fig. 18.



losange, et h la largeur de la fente étroite par laquelle l'air s'écoule, h étant supposé très-petit relativement à b ; soient encore $OP = x$, et v

la vitesse de déplacement du disque mobile dans la partie où se trouvent les ouvertures. Prenons comme précédemment l'origine du temps au moment où la fente étroite se trouve en O; alors on a

$$F(t) = kah \frac{b - 2x}{b} \text{ de } x = 0 \text{ à } x = \frac{b}{2}$$

et

$$F(t) = kah \frac{b + 2x}{b} \text{ de } x = -\frac{b}{2} \text{ à } x = 0.$$

En posant $\frac{b}{2} = b'$, on obtient

$$F(t) = \frac{kah}{b'} (b' - x) \text{ de } x = 0 \text{ à } x = b'$$

et

$$F(t) = \frac{kah}{b'} (b' + x) \text{ de } x = -b' \text{ à } x = 0.$$

Ces valeurs sont identiques à celles qu'on a obtenues dans le cas précédent multipliées par le facteur $\frac{h}{b'}$; on aura donc, comme plus haut,

$$(16) \quad \alpha_m = \frac{2 kahd}{b' \pi^2} \frac{\sin^2 \pi \frac{mb'}{d}}{m^2} = \frac{4 kahd}{\pi^2 b} \frac{\sin^2 \pi \frac{mb}{2d}}{m^2}.$$

La discussion de α_m se ferait exactement comme dans le cas précédent, en remplaçant la largeur de chaque ouverture rectangulaire par la demi-diagonale de chaque losange; seulement ici, nécessairement, on a $d > 2b'$ ou $d > b$. L'intensité absolue des sons sera forcément très-faible à cause de $\frac{h}{b'}$, qui se trouve en facteur dans α_m .

VI. *Deux ouvertures en losange glissant l'une devant l'autre.* — Supposons que dans une sirène la boîte et le disque portent des ouvertures en forme de losange. Soient ABCD, A'B'C'D' (*fig. 19*) deux losanges se recouvrant en partie; prenons l'origine du temps à l'instant où les deux losanges coïncident complètement. Soient AA' = x, AC = b, BD = a. La figure AMCM' (*fig. 19*) est un losange semblable à ABCD;

on a

$$MM' = \frac{a(b-x)}{b}, \text{ puisque } A'C = b-x;$$

$$\text{surf} A'MCM' = \frac{a(b-x)^2}{2b};$$

$$F(t) = \frac{ha}{2b}(b-x)^2, \text{ de } x=0 \text{ à } x=b, \text{ avec } x=vt \text{ (fig. 19, } \beta);$$

$$F(t) = \frac{ha}{2b}(b+x)^2, \text{ de } x=-b \text{ à } x=0 \text{ (fig. 19, } \alpha).$$

$F(t)$ peut donc être représenté par les ordonnées de deux paraboles.

Fig. 19.



Si $OB = b$ (fig. 20), la courbe BCB \bar{D} a pour équation

$$y = \frac{h}{b^2}(b-x)^2,$$

et la courbe CAE

$$y = \frac{h}{b^2}(b+x)^2, \text{ avec } OC = h = \frac{hab}{2};$$

Fig. 20.



ces deux courbes entre les points A et C pour l'une, C et B pour l'autre,

représentent $F(t)$ de $x = -b$ à $x = +b$. On aura donc

$$A_0 = \frac{ka}{2bd} \int_{-b}^0 (b+x)^2 dx + \frac{ka}{2bd} \int_0^b (b-x)^2 dx = \frac{kab^2}{3d},$$

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{2ka}{bd} \int_{-b}^0 (b+x)^2 \cos 2\pi \frac{mx}{d} dx \\ &= \frac{kad}{m^2 \pi^2} \left(1 - \frac{d}{2b\pi} \frac{\sin \frac{2\pi mb}{d}}{m} \right), \end{aligned}$$

$$B_m = 0;$$

donc

$$(17) \quad x_m \dots A_m = \frac{kad}{\pi^2} \left(1 - \frac{d}{2b\pi} \frac{\sin \frac{2\pi mb}{d}}{m} \right).$$

Si l'on mène la droite $G'H'$ à une distance de XX' égale à $A_0 = \frac{2hb}{3d}$ (*fig. 20*), où $OC = h$, $OB = b$, $O\alpha = \frac{3d}{2}$, HCG , $H'C'G'$ représenteront la période de condensation, et $GBA'H'$ celle de la dilatation. Quoiqu'il y ait en C discontinuité, cependant la forme générale de ces courbes peut permettre de prévoir que les harmoniques supérieurs seront peu intenses.

Le rapport $\frac{x_m}{x_1}$ est égal à

$$y = \frac{1 - \frac{d}{2\pi b} \frac{\sin \frac{2\pi mb}{d}}{m}}{m^2 \left(1 - \frac{d}{2\pi b} \frac{\sin \frac{2\pi b}{d}}{1} \right)};$$

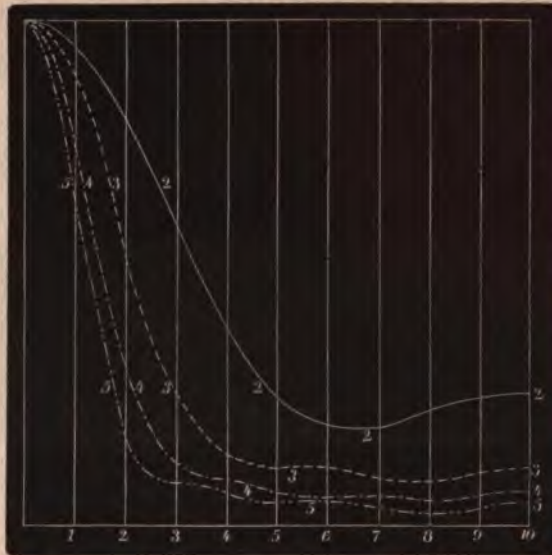
les valeurs de y pour $m = 2, 3, 4, 5$ sont construites (*fig. 21*). On voit que, si l'on pose $\frac{b}{d} = x$:

1° Pour $x = 0$, $y = 1$ et $\frac{dy}{dx} = 0$.

2° Pour $x = 1$ et $x = \frac{1}{2}$, y a les mêmes valeurs; en effet, $\sin 2\pi mx = 0$, et $y = \frac{1}{m^2}$; de plus, pour $x = 1$, on a $\frac{dy}{dx} = 0$.

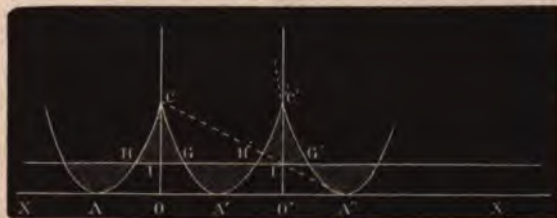
Pourquoi obtient-on les mêmes valeurs de y pour $\frac{b}{d} = \frac{1}{2}$ et $\frac{b}{d} = 1$, c'est-à-dire quand les ouvertures se touchent, et quand leur distance est égale à leur largeur?

Fig. 21.



Si $\frac{b}{d} = \frac{1}{2}$, les ouvertures sont à une distance égale à la diagonale dirigée dans le sens du mouvement; la demi-parabole $A'C'$ fait suite immédiatement à CB (*fig. 20*), et la partie rectiligne BA' est supprimée,

Fig. 22.



comme on le reconnaît (*fig. 22*); la courbe figurative du mouvement vibratoire est donc la parabole

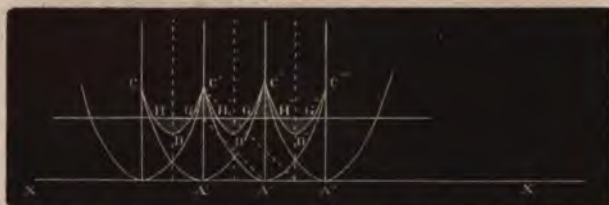
$$y = \frac{h}{b^2} x^2,$$

coupée par la droite HG' à une distance de $\frac{h}{3}$ de son sommet; l'équation de la parabole rapportée à la ligne HG' est, par suite,

$$y = \frac{h}{b^2} \left(x^2 - \frac{b^2}{3} \right) = \frac{h}{b^2} x^2 - \frac{h}{3}.$$

Si $\frac{b}{d} = 1$, les ouvertures se touchent immédiatement, et une ouverture du disque en recouvre toujours deux de la boîte, sauf quand il y a coïncidence complète. Les paraboles CBD et $C'A'D'$ se coupent, le

Fig. 23.



point A' coïncidant avec O (*fig. 20*), comme on le voit *fig. 23*; on a pour la valeur de y , par suite,

$$y = \frac{h}{b^2} (b-x)^2 + \frac{h}{b^2} x^2 = \frac{h}{b^2} (b^2 + 2x^2 - 2bx),$$

nouvelle parabole qui, rapportée à son sommet et aux axes habituels, a pour équation

$$y = \frac{2h}{b^2} x^2;$$

on a dans ce cas

$$A_0 = \frac{kab}{3} = \frac{2h}{3},$$

et, par suite, l'équation de la parabole rapportée à la ligne HG'' devient

$$y = \frac{2hx^2}{b^2} - \frac{h}{6},$$

courbe semblable à la précédente, et semblablement placée par rapport aux axes des coordonnées. Donc, les courbes figuratives du mouvement étant semblables, les sons produits auront le même timbre.

3° La *fig. 21* fait voir que le deuxième harmonique l'emporte notablement sur tous les autres, qui décroissent très-rapidement et conservent ensuite une valeur sensiblement constante, quoique très-faible. Le minimum du deuxième harmonique paraît correspondre à $\frac{b}{d} = x = 0,64$ environ.

Or, si l'on cherche la valeur de $\frac{b}{d}$, pour laquelle les deux lignes HG et GH' (*fig. 20*) ont la même longueur, on trouve qu'il n'y en a aucune. En effet, pour trouver l'abscisse du point G, on est conduit à résoudre l'équation

$$\frac{(b-x)^2}{2b} = \frac{b^2}{3d}, \quad \text{d'où} \quad x = b - \sqrt{\frac{2}{3} \frac{b^3}{d}}.$$

On doit poser cette valeur égale à $\frac{d}{4}$, ce qui conduit à l'équation

$$\frac{b}{d} - \sqrt{\frac{2}{3} \frac{b^3}{d^3}} = \frac{1}{4},$$

et, en posant $\frac{b}{d} = z^2$, on obtient l'équation du troisième degré

$$z^3 - \sqrt{\frac{3}{2}} z^2 + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} = 0,$$

équation qui n'a qu'une racine négative réelle; mais le premier membre est minimum et très-voisin de zéro pour $z = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ou $\frac{b}{d} = \frac{2}{3}$; pour cette valeur, les deux périodes dans lesquelles l'ébranlement peut être décomposé sont aussi voisines que possible de l'égalité. Or cette valeur de $\frac{b}{d} = \frac{2}{3} = 0,66$ est très-voisine de celle pour laquelle le second harmonique atteint son minimum.

VII. *Ouverture triangulaire et fente étroite.* — Seebeck a étudié par l'expérience ce cas et les trois suivants; quoiqu'il n'indique aucun résultat bien net, j'ai pensé devoir y appliquer également la théorie générale. Supposons donc le plateau de la sirène muni d'ouvertures triangulaires et la boîte de fentes étroites dirigées suivant des rayons.

Soient ABC (*fig. 24*) une des ouvertures triangulaires du disque, MN une des fentes étroites, h la largeur de cette fente, a la base AB du

Fig. 24.

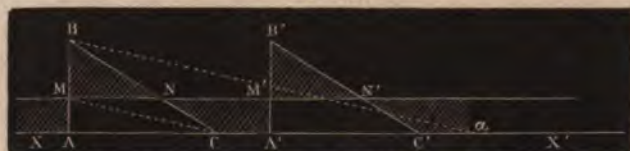


triangle, et $CD = b$ sa hauteur, enfin $x = DE$, avec $x = vt$. On aura par suite

$$F(t) = \frac{kah(b-x)}{b}, \quad \text{de } x=0 \text{ à } x=b.$$

Dans la *fig. 25* se trouve tracée la courbe figurative du mouvement

Fig. 25.



vibratoire, en posant $AB = kah = c$, $AC = b$ et $AA' = d$. On aura ainsi

$$A_s = \frac{kahb}{2d} = \frac{cb}{2d},$$

$$A_m = \frac{2kah}{bd} \int_0^b (b-x) \cos 2\pi \frac{mx}{d} dx = \frac{kahd}{\pi^2 b} \frac{\sin^2 \pi \frac{mb}{d}}{m^2},$$

$$B_m = \frac{2kah}{bd} \int_0^b (b-x) \sin 2\pi \frac{mx}{d} dx = \frac{kah}{m\pi} \left(1 - \frac{d}{2\pi mb} \sin 2\pi \frac{mb}{d} \right).$$

Donc

$$z_m^2 = A_m^2 + B_m^2,$$

$$(18) \quad z_m^2 = \frac{k^2 a^2 h^2}{\pi^2} \left[\frac{d^2}{\pi^2 b^2} \frac{\sin^4 \pi \frac{mb}{d}}{m^4} + \frac{1}{m^2} \left(1 - \frac{d}{2\pi mb} \sin 2\pi \frac{mb}{d} \right)^2 \right].$$

Soient ABC (*fig. 24*) une des ouvertures triangulaires du disque, MN une des fentes étroites, h la largeur de cette fente, a la base AB du

Fig. 24.

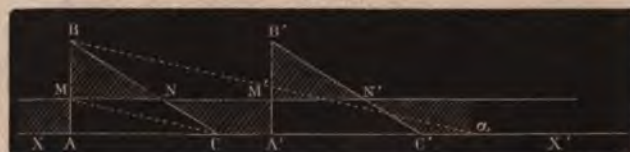


triangle, et $CD = b$ sa hauteur, enfin $x = DE$, avec $x = vt$. On aura par suite

$$F(t) = \frac{kah(b-x)}{b}, \text{ de } x = 0 \text{ à } x = b.$$

Dans la *fig. 25* se trouve tracée la courbe figurative du mouvement

Fig. 25.



vibratoire, en posant $AB = kah = c$, $AC = b$ et $AA' = d$. On aura ainsi

$$A_0 = \frac{kahb}{2d} = \frac{cb}{2d},$$

$$A_m = \frac{2kah}{bd} \int_0^b (b-x) \cos 2\pi \frac{mx}{d} dx = \frac{kahd}{\pi^2 b} \frac{\sin^2 \pi \frac{mb}{d}}{m^2},$$

$$B_m = \frac{2kah}{bd} \int_0^b (b-x) \sin 2\pi \frac{mx}{d} dx = \frac{kah}{m\pi} \left(1 - \frac{d}{2\pi mb} \sin 2\pi \frac{mb}{d} \right).$$

Donc

$$z_m^2 = A_m^2 + B_m^2,$$

$$(18) \quad z_m^2 = \frac{h^2 a^2 h^2}{\pi^2} \left[\frac{d^2}{\pi^2 b^2} \frac{\sin^4 \pi \frac{mb}{d}}{m^4} + \frac{1}{m^2} \left(1 - \frac{d}{2\pi mb} \sin 2\pi \frac{mb}{d} \right)^2 \right].$$

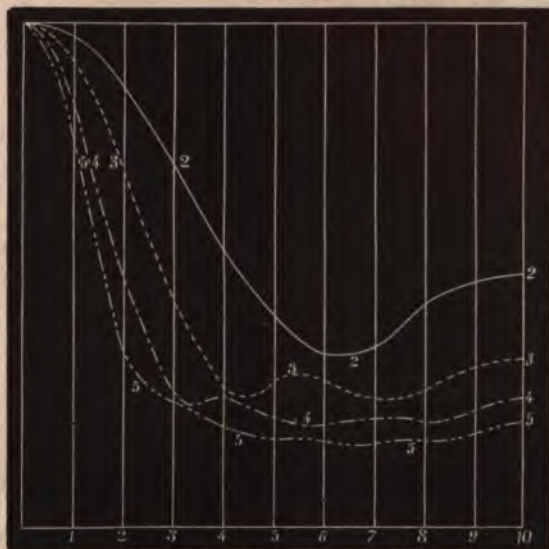
En menant la droite MN' (*fig. 25*) à la distance A_0 de XX' ($AB = c$, $AC = b$, $Ax = 2d$), les triangles MBN représenteront la période de condensation, et $NCA'M'$ celle de dilatation.

La *fig. 26* représente les valeurs de $\frac{\alpha_m}{\alpha_1}$ pour $m = 2, 3, 4, 5$.

On peut remarquer :

1° Que les harmoniques supérieurs sont en général assez intenses,

Fig. 26.



ce qui provient de la discontinuité du mode d'ébranlement; le deuxième l'emporte sur tous les autres et a son minimum pour $\frac{b}{d} = 0,63$ environ; les autres décroissent assez rapidement, quand $\frac{b}{d}$ augmente, et ne varient plus que dans de faibles limites.

2° Quand $\frac{b}{d}$ décroît, B_m devient très-petit relativement à A_m , qui devient constant et égal à $2A_0$. Par suite, si les ouvertures sont très-éloignées, on obtient les mêmes valeurs pour $\frac{\alpha_m}{\alpha_1}$ que dans le cas de deux rectangles glissant l'un devant l'autre.

3° Si l'on cherche la condition pour que les deux périodes du mouvement vibratoire aient la même durée, on trouve que l'on doit avoir

$\frac{b}{d} = 1$; or, dans la *fig.* 26, on voit que le minimum du deuxième harmonique a lieu pour $\frac{b}{d} = 0,63$ environ. On ne retrouve donc plus la coïncidence observée dans tous les autres cas; c'est la seule exception que j'ai observée. Elle pourrait peut-être s'expliquer par ce fait que, pour $\frac{b}{d} = 0$, $A_m = 0$ et $B_m = \frac{kah}{m\pi}$, et que, par suite, pour cette valeur, la fonction $\frac{\alpha_m}{\alpha_1}$ a une tout autre forme que pour les autres valeurs de $\frac{b}{d}$. De plus, pour cette valeur $\frac{b}{d} = 1$, le trapèze NCA'M' (*fig.* 25) est remplacé par un triangle.

Si l'on suppose le triangle placé en sens inverse, de telle sorte que l'ébranlement augmente progressivement pour finir brusquement, on reconnaît que A_m conserve la même valeur, tandis que B_m change de signe; par suite, α_m ne change pas; il n'y a de différence que dans les phases des harmoniques, ce qui n'influe nullement sur le timbre du son produit.

VIII. *Deux ouvertures triangulaires glissant l'une devant l'autre.* — Supposons la boîte de la sirène et le plateau munis d'ouvertures triangulaires dirigées dans le même sens. Prenons l'origine du temps à l'instant où les ouvertures coïncident complètement.

On aura (*fig.* 27) $F(t) = k \times \text{MCN}$ pour les valeurs négatives, et

Fig. 27.



$F(t) = k \times \text{M}'\text{N}'\text{C}''$ pour t positif. Soient $AB = a$, $OC = b$, $CC' = CC'' = x$,

avec $x = vt$. On aura

$$CP = b - x, \quad MN = \frac{a(b-x)}{b}, \quad \text{Surf. MCN} = \frac{a(b-x)^2}{2b};$$

donc

$$F(t) = \frac{ka}{2b}(b-x)^2, \quad \text{de } x=0 \text{ à } x=b,$$

et

$$F(t) = \frac{ka}{2b}(b+x)^2, \quad \text{de } x=-b \text{ à } x=0.$$

On a donc exactement les mêmes formules que dans le cas de deux losanges glissant l'un devant l'autre; les harmoniques auront donc les mêmes intensités relatives.

IX. *Deux ouvertures triangulaires glissant en sens contraire.* — Si la boîte de la sirène et le disque mobile portent des ouvertures triangulaires disposées en sens inverse, prenons l'origine du temps à l'instant où les ouvertures sont dans la position relative $ABC, A''B''C''$ (*fig. 28 et 29*), c'est-à-dire quand les sommets et les bases se touchent.

Fig. 28.



Fig. 29.



Soient $AB = a$, $CC'' = b$, $x = CD = C'C''$; de $x = -b$ à $x = 0$, l'ouverture par laquelle l'air s'écoule a la forme d'un losange $CMC'M'$ (*fig. 28*); de $x = 0$ à $x = b$, elle a la forme d'un double trapèze $NMPP'M'N'$ (*fig. 29*). On aura donc

$$F(t) = k \times CMC'M', \quad \text{de } x = -b \text{ à } x = 0, \quad \text{avec } x = vt,$$

$$F(t) = \frac{ka}{4b}(b+x)^2,$$

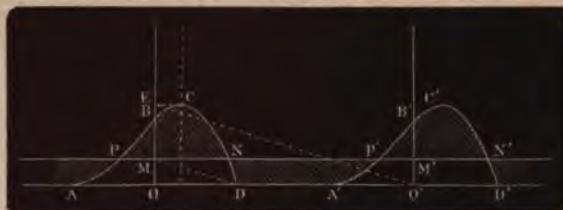
et

$$F(t) = k \times NMPP'M'N' = \frac{ka}{4b}(b+3x)(b-x) = \frac{ka}{4b}(b^2 + 2bx - 3x^2),$$

de $x=0$ à $x=b$.

$F(t) = \frac{ka}{4b}(b+x)^2$ représente une parabole telle que APB (fig. 30), en prenant $OB = \frac{kab}{4}$; $F(t) = \frac{ka}{4b}(b^2 + 2bx - 3x^2)$ représente une seconde parabole BCD, tangente en B à la première, et avec un para-

Fig. 30.



mètre trois fois moindre; la courbe figurative du mouvement est donc ABCD, A'B'C'D'.

Par suite, on aura

$$\begin{aligned}
 A_m &= \frac{1}{d} \left[\int_{-b}^0 \frac{ka}{4b} (b+x)^2 dx + \int_0^b \frac{ka}{4b} (b^2 + 2bx - 3x^2) dx \right] \\
 &= \frac{ka}{2bd} \int_0^b (b^2 - x^2) dx = \frac{kab^2}{3d}, \\
 A_m &= \frac{ka}{2bd} \left[\int_{-b}^0 (b+x)^2 \cos \frac{2\pi mx}{d} dx + \int_0^b (b^2 + 2bx - 3x^2) \cos \frac{2\pi mx}{d} dx \right] \\
 &= \frac{ka}{bd} \int_0^b (b^2 - x^2) \cos \frac{2\pi mx}{d} dx \\
 &= \frac{-kad}{2m^2\pi^2} \left(\cos \frac{2\pi mb}{d} - \frac{\sin \frac{2\pi mb}{d}}{\frac{2\pi mb}{d}} \right), \\
 B_m &= \frac{ka}{2bd} \left[\int_{-b}^0 (b+x)^2 \sin \frac{2\pi mx}{d} dx + \int_0^b (b^2 + 2bx - 3x^2) \sin \frac{2\pi mx}{d} dx \right] \\
 &= \frac{2ka}{bd} \int_0^b (bx - x^2) \sin \frac{2\pi mx}{d} dx \\
 &= \frac{kad}{2m^2\pi^2} \left(\frac{-d}{\pi mb} \cos \frac{2\pi mb}{d} + \frac{d}{\pi mb} - \sin \frac{2\pi mb}{d} \right), \\
 \alpha_m &= \sqrt{A_m^2 + B_m^2}.
 \end{aligned}$$

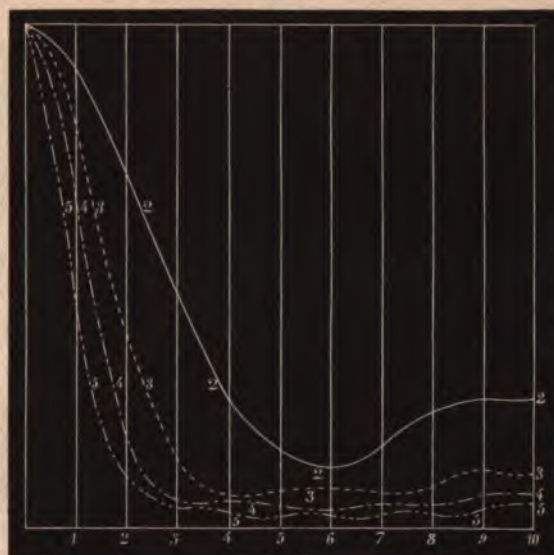
Vu la complication des valeurs de A_m et de B_m , il n'y a aucune simplification à chercher l'expression de α_m ; il vaut mieux calculer séparément A_m^2 et B_m^2 . On a ainsi

$$(19) \quad \alpha_m^2 = \left(\frac{kad}{\pi^2} \right)^2 \frac{1}{m^4} \left[\left(\cos \frac{2\pi mb}{d} - \frac{\sin \frac{2\pi mb}{d}}{\frac{2\pi mb}{d}} \right)^2 + \left(\frac{d}{\pi mb} - \frac{d}{\pi mb} \cos \frac{2\pi mb}{d} - \sin \frac{2\pi mb}{d} \right)^2 \right].$$

En menant la droite PN' parallèle à XX' (*fig. 30*) à une distance $A_0 = \frac{kab^2}{3d} = \frac{4OB \times b}{3d} = OM$, où $OE = \frac{4h}{3}$, $OD = b$, $OO' = d$, la partie $PBCN$ représentera la période de condensation, et $NDA'P'$ celle de dilatation.

Dans la *fig. 31* se trouvent construites les courbes qui représentent

Fig. 31.



la valeur de $\frac{\alpha_m}{\alpha_1}$, pour les valeurs de $m = 2, 3, 4, 5$. Les harmoniques

supérieurs sont en général assez faibles, sauf le second, et décroissent à partir de $\frac{b}{d} = 0$, et d'autant plus vite que leur rang est plus élevé. Le cinquième a déjà une amplitude si faible qu'il pourrait à peine être entendu.

On reconnaît que pour $\frac{b}{d} = 0$, on a $\frac{x_m}{x_1} = 1$ et $\frac{dy}{dx} = 0$.

Pour $\frac{b}{d} = 1$, on a $B_m = 0$; par suite, $A_m = -\frac{kad}{2m^2\pi^2}$; on obtient donc les mêmes valeurs, au signe près, que dans le cas de deux losanges ou de deux triangles dirigés dans le même sens : dans ce dernier cas, en effet, si $\frac{b}{d} = 1$, on a, à cause de la superposition des deux courbes (*fig. 23*),

$$F(t) = \frac{ka}{b}(b^2 - 2bx + 2x^2);$$

en posant $\frac{kab}{2} = h$; et en prenant pour axes des coordonnées la ligne $y = A_0 = \frac{kab}{3} = \frac{2h}{3}$ et $x = \frac{b}{2}$, comme on l'a fait précédemment, cette équation devient

$$y = \frac{2hx^2}{b^2} - \frac{h}{6}.$$

Si les triangles sont dirigés en sens contraire, pour $\frac{b}{d} = 1$ on a

$$y = \frac{ka}{4b}(b^2 + 2bx - 2x^2),$$

équation d'une parabole; en posant $\frac{kab}{4} = h'$, et prenant pour axes des coordonnées $y = A_0 = \frac{kab}{3}$, et $x = \frac{b}{2}$, cette équation devient

$$y = \frac{kab}{24} - \frac{kax^2}{2b}, \quad \text{ou bien} \quad y = \frac{h'}{6} - \frac{2h'x^2}{b^2}.$$

Or, pour deux triangles dans le même sens, on a obtenu dans ce cas

$$y = -\frac{h}{6} + \frac{2hx^2}{b^2}.$$

Les deux courbes sont dirigées en sens inverse; de plus, l'intensité

absolue n'est pas la même, puisque $k' = \frac{h}{2}$; mais comme dans h et h' entre le coefficient k , indéterminé, il en résulte que les sons obtenus seront les mêmes, quant au timbre, mais moins intenses, quand les triangles sont tournés en sens contraire, que quand ils sont dirigés dans le même sens.

Ces considérations sont du reste purement théoriques, puisqu'on ne peut réaliser ce cas dans la construction de la sirène, les ouvertures successives devant se toucher sans aucune interruption.

X. *Ouverture circulaire et fente étroite.* — Supposons que le fond de la boîte de la sirène porte des fentes étroites et le disque des ouvertures circulaires.

Fig. 32.



Soit AB la fente étroite (*fig. 32*); on aura

$$F(t) = k \times AB \times h,$$

h étant la largeur de cette fente; donc,

$$F(t) = 2kh \sqrt{R^2 - x^2} = 2khR \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}},$$

en posant $OC = x$, $OD = R$, et $x = vt$.

La courbe qui caractérise dans ce cas la nature du mouvement est

Fig. 33.



une ellipse (*fig. 33*), dont l'équation est

$$F(t) = y = 2kh \sqrt{R^2 - x^2},$$

ou, en posant $2kh = \alpha$,

$$\frac{y^2}{\alpha^2 R^2} + \frac{x^2}{R^2} = 1.$$

On aura par suite :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{d} \int_{-R}^{+R} 2khR \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} dx = \frac{h\pi R^2}{d}, \\ x_n &= A_n - \frac{4khR}{d} \int_{-R}^{+R} \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} \cos \frac{2\pi mx}{d} dx, \\ B_n &= \frac{4khR}{d} \int_{-R}^{+R} \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} \sin \frac{2\pi mx}{d} dx = 0. \end{aligned}$$

Pour obtenir α_m , il faut développer en série l'expression à intégrer : le mode le plus simple de développement consiste à remplacer le cosinus par la série en fonction de l'arc. On aura, par suite,

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{4khR}{d} \left[\int_{-R}^{+R} \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} dx - \frac{1}{1.2} \left(\frac{2\pi m}{d} \right)^2 \int_{-R}^{+R} \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} x^2 dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1.2.3.4} \left(\frac{2\pi m}{d} \right)^4 \int_{-R}^{+R} \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} x^4 dx - \dots \right]. \end{aligned}$$

Chacune de ces quadratures s'effectuera facilement si l'on pose

$$\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} = \cos \varphi, \text{ d'où } x = R \sin \varphi, \quad dx = R \cos \varphi d\varphi;$$

alors

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{+R} \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} x^k dx &= R^{k+1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin^k \varphi d\varphi \\ &= R^{k+1} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} \varphi d\varphi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin^{2k+2} \varphi d\varphi \right). \end{aligned}$$

Or on sait que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} \varphi d\varphi = \frac{1.3.5 \dots (2k-1)\pi}{2.4.6 \dots 2k}.$$

Donc

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} \varphi d\varphi = \frac{1.3.5 \dots (2k-1)\pi}{2.4.6 \dots 2k}.$$

Par suite

$$\int_{-R}^{+R} \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} x^{2k} dx = R^{2k+1} \pi \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2k} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k+2)} \right]$$

$$= \pi R^{2k+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2k \cdot (2k+2)}.$$

Donc on aura

$$\alpha_m = \frac{4khR}{d} \left[\frac{\pi R}{2} - \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{1}{2 \cdot 4} \left(\frac{2\pi m}{d} \right)^2 \pi R + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{2\pi m}{d} \right)^4 \pi R \right.$$

$$\left. - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \left(\frac{2\pi m}{d} \right)^6 \pi R + \dots \right],$$

ou bien encore, mettant $\frac{\pi R}{2}$ en facteur, introduisant le diamètre Δ du cercle, et faisant diverses réductions, on arrive à

$$(20) \left\{ \begin{aligned} \alpha_m &= \frac{4kh\pi\Delta^2}{2d} \left[1 - \frac{1}{1} \frac{1}{1 \cdot 2} \left(\frac{\pi m \Delta}{2d} \right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{\pi m \Delta}{2d} \right)^4 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{\pi m \Delta}{2d} \right)^6 + \dots \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+1)} \left(\frac{\pi m \Delta}{2d} \right)^{2n} + \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

Cette série est peu convergente, quand m devient considérable, et l'on est obligé de prendre un grand nombre de termes, et de calculer dans chacun d'eux un grand nombre de chiffres.

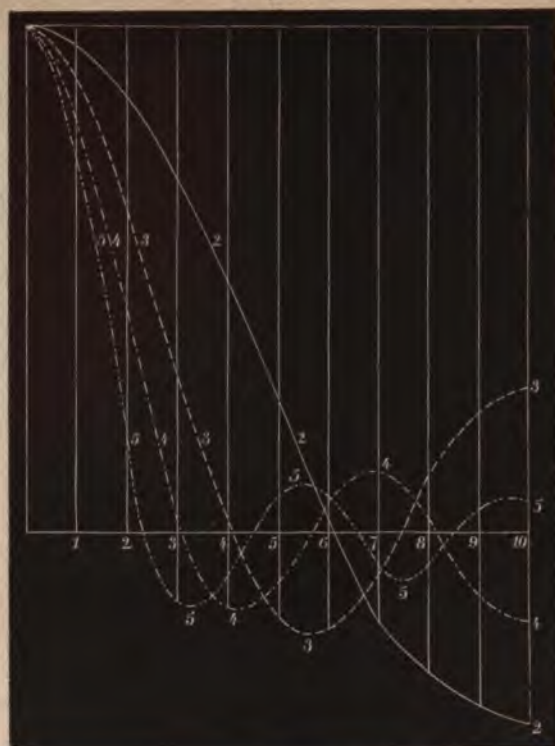
Si l'on mène une parallèle à XX' à une distance $\Lambda_0 = \frac{4\pi R^2 h}{d}$ (*fig. 33*), la partie MCN représente la période de condensation, et NBA'M' celle de dilatation.

Dans la *fig. 34* se trouvent construites les courbes qui donnent les valeurs de $\frac{\alpha_m}{\alpha_1}$ pour $m = 2, 3, 4, 5$; leur exactitude peut laisser un peu à désirer pour les valeurs de $\frac{b}{d}$ voisines de 1. On peut remarquer que :

1° Comme dans tous les autres cas, pour $\frac{b}{d} = 0$, on a $\frac{\alpha_m}{\alpha_1} = 0$ et $\frac{dy}{dx} = 0$.

2° Chaque harmonique passe par 0, un nombre de fois marqué par son rang diminué d'une unité.

Fig. 34.



3° Le deuxième harmonique est nul pour $\frac{b}{d} = 0,61$. Pour qu'il y ait égalité entre les deux périodes de l'ébranlement, il faut résoudre l'équation

$$\frac{\pi \Delta}{d} = 4 \sqrt{1 - \frac{d^2}{14 \Delta^2}} \quad \text{ou} \quad \pi x = 4 \sqrt{1 - \frac{1}{4x^2}},$$

ou bien

$$\pi^2 x^4 - 16x^2 + 4 = 0.$$

On trouve pour x la valeur 0,555, valeur peu éloignée de celle 0,61, pour laquelle le deuxième harmonique est nul.

4° On peut remarquer une certaine analogie entre les courbes obtenues dans ce cas, et celles qui correspondent à un rectangle et une

fente étroite (*fig. 12*), surtout quand les ouvertures sont assez éloignées les unes des autres. Les courbes décroissent ici un peu moins rapidement : ceci démontre qu'approximativement on pourrait remplacer les cercles par des carrés inscrits.

XI. *Deux ouvertures circulaires glissant l'une devant l'autre.* — Soient O et O' les centres de deux ouvertures circulaires placées sur le fond de la boîte et le plateau de la sirène (*fig. 35*) ; l'air s'écoule par la

Fig. 35.



surface commune aux deux ouvertures ACBD. On pourra donc poser

$$F(t) = k \times \text{ACBD}, \text{ de } x = -\Delta \text{ à } x = +\Delta,$$

en représentant par Δ le diamètre des ouvertures, par x la distance des centres et posant $x = vt$. Or la surface ACBD est égale au double de la surface AEBD, qui elle-même est la différence du secteur AOB et du triangle OAB. Or $OE = \frac{x}{2}$; donc on aura

$$\text{Secteur AOB} = R^2 \arccos \frac{x}{2R},$$

$$\text{Triangle AOB} = \frac{x}{2} \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}};$$

$$F(t) = \frac{k\Delta}{2} \left(\Delta \arccos \frac{x}{\Delta} - x \sqrt{1 - \frac{x^2}{\Delta^2}} \right), \text{ de } x = 0 \text{ à } x = \Delta.$$

Pour les x négatifs, on aurait

$$F(t) = \frac{k\Delta}{2} \left[\Delta \left(\pi - \arccos \frac{x}{\Delta} \right) + x \sqrt{1 - \frac{x^2}{\Delta^2}} \right], \text{ de } x = -\Delta \text{ à } x = 0.$$

Par suite, on pourra poser

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-\Delta}^0 \frac{k\Delta}{2} \left[\Delta \left(\pi - \arccos \frac{x}{\Delta} \right) + x \sqrt{1 - \frac{x^2}{\Delta^2}} \right] dx \\ &\quad + \frac{1}{d} \int_0^{\Delta} \frac{k\Delta}{2} \left(\Delta \arccos \frac{x}{\Delta} - x \sqrt{1 - \frac{x^2}{\Delta^2}} \right) dx \\ &= \frac{k^2 \Delta}{d} \int_0^{\Delta} \left(\arccos \frac{x}{\Delta} - \frac{x}{\Delta} \sqrt{1 - \frac{x^2}{\Delta^2}} \right) dx = \frac{2k\Delta^3}{3d}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{k\Delta}{d} \int_{-\Delta}^0 \left[\Delta \left(\pi - \arccos \frac{x}{\Delta} \right) + x \sqrt{1 - \frac{x^2}{\Delta^2}} \right] \cos 2\pi \frac{mx}{d} dx \\ &\quad + \frac{k\Delta}{d} \int_0^{\Delta} \left(\Delta \arccos \frac{x}{\Delta} - x \sqrt{1 - \frac{x^2}{\Delta^2}} \right) \cos 2\pi \frac{mx}{d} dx \\ &= \frac{2k\Delta^3}{d} \int_0^{\Delta} \left(\arccos \frac{x}{\Delta} - \frac{x}{\Delta} \sqrt{1 - \frac{x^2}{\Delta^2}} \right) \cos 2\pi \frac{mx}{d} dx, \end{aligned}$$

$$B_m = 0.$$

Intégrant A_m par parties, on arrive à

$$A_m = \alpha_m = \frac{2k\Delta}{m\pi} \int_0^{\Delta} \sqrt{1 - \frac{x^2}{\Delta^2}} \sin 2\pi \frac{mx}{d} dx.$$

Développant $\sin 2\pi \frac{mx}{d}$ en série, on a

$$\alpha_m = \frac{2k\Delta}{m\pi} \int_0^{\Delta} \sqrt{1 - \frac{x^2}{\Delta^2}} \left[\frac{2m\pi}{d} x - \frac{1}{1.2.3} \left(\frac{2m\pi}{d} \right)^3 x^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5} \left(\frac{2m\pi}{d} \right)^5 x^5 - \dots \right] dx.$$

On trouve, par la méthode employée précédemment,

$$\int_0^{\Delta} \sqrt{1 - \frac{x^2}{\Delta^2}} x^{2k+1} dx = \frac{2.4.6 \dots 2k}{3.5.7 \dots (2k+1)(2k+3)} \Delta^{k+2}$$

et

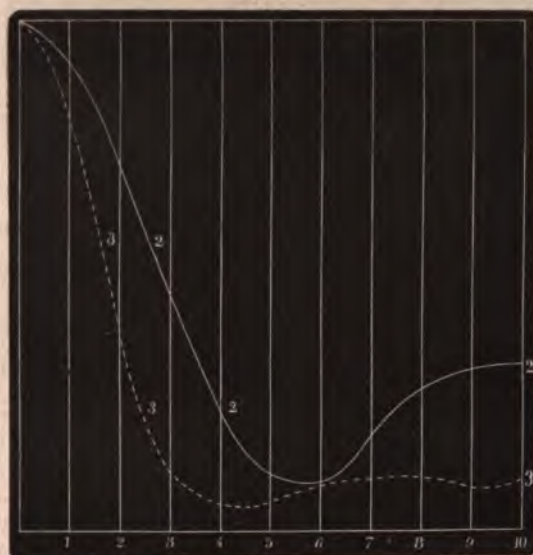
$$\int_0^{\Delta} \sqrt{1 - \frac{x^2}{\Delta^2}} x dx = \frac{\Delta^2}{3}.$$

Donc on aura en définitive, pour α_m ,

$$\alpha_m = \frac{4k\Delta^2}{3d} \left[1 - \frac{1}{3} \frac{1}{5} \left(\frac{2m\pi\Delta}{d} \right)^2 + \frac{1}{3.5} \frac{1}{5.7} \left(\frac{2m\pi\Delta}{d} \right)^4 - \frac{1}{3.5.7} \frac{1}{5.7.9} \left(\frac{2m\pi\Delta}{d} \right)^6 + \dots \right. \\ \left. \pm \frac{1}{3.5.7 \dots (2k+1)} \frac{1}{5.7.9 \dots (2k+3)} \left(\frac{2m\pi\Delta}{d} \right)^{2k} \mp \dots \right].$$

Cette série est moins convergente que la précédente, et, à moins de calculer chaque terme de la série avec dix à douze chiffres, on ne peut obtenir la valeur de α_m , pour des valeurs de $\frac{\Delta}{d}$ et de m un peu grandes; je n'ai pu construire, par suite, que les courbes correspondantes à $m=2$ et $m=3$ (*fig. 36*), n'ayant pas de machine à calculer permettant d'obtenir plus de six chiffres.

Fig. 36.



Si l'on construit la courbe représentée par $F(t)$, on obtient, en posant $\frac{k\Delta}{2} = 1$,

$$y = \Delta \arccos \frac{x}{\Delta} - x \sqrt{1 - \frac{x^2}{\Delta^2}};$$

pour $x=0$, on a $\frac{dy}{dx} = -2$, et, pour $y=0$, $\frac{dy}{dx} = 0$.

La courbe ainsi obtenue (fig. 37) diffère peu d'une ligne droite dans une grande partie de son étendue. $AB = \frac{\pi\Delta}{2}$; on a

$$A_0 = \frac{2k\Delta^2}{3d},$$

et, comme $\frac{h\Delta}{2} = 1$, on aura

$$A_0 = \frac{4\Delta^2}{3d} = \Delta \frac{4}{3} \frac{\Delta}{d};$$

en menant une parallèle à XX' à cette distance, EBF représentera la période de condensation et $FCD'E'$ celle de la dilatation.

Fig. 37.



Le deuxième harmonique a son minimum vers 0,54 environ. Si l'on cherche la condition pour que les deux périodes du mouvement vibratoire aient la même durée, on est conduit à résoudre l'équation

$$\frac{4\Delta}{3d} = \arccos \frac{d}{4\Delta} - \frac{d}{4\Delta} \sqrt{1 - \frac{d^2}{16\Delta^2}},$$

ou, en posant $\frac{d}{4\Delta} = x$,

$$\frac{1}{3x} = \arccos x - x \sqrt{1 - x^2}.$$

En construisant séparément les deux courbes

$$y = \frac{1}{3x}, \quad y' = \arccos x - x \sqrt{1 - x^2},$$

on reconnaît qu'elles ne se coupent pas, mais que leur distance est minimum pour $x = 0,4249$, ce qui donne $\frac{\Delta}{d} = 0,588$, valeur peu différente de celle qui correspond au minimum du deuxième harmonique 0,54.

Si dans les deux cas précédents, on remplace les ouvertures circulaires par des ouvertures elliptiques, on arrive à des formules presque identiques, et qui ne diffèrent des précédentes que par un coefficient constant, ce qui démontre que les harmoniques suivent exactement la même marche que dans le cas d'ouvertures circulaires.

Par suite, on voit que, dans la sirène ordinairement employée, et qui est munie d'ouvertures elliptiques, on devra, pour obtenir un son aussi rapproché que possible d'un son pendulaire, placer les ouvertures à une distance telle, que leur grand diamètre soit environ un peu plus de la moitié de la distance des centres, ou bien que ce diamètre soit un peu plus grand que la partie pleine du disque qui sépare les ouvertures.

En résumé, si l'on compare entre elles les courbes qui expriment les valeurs du rapport $\frac{\alpha_m}{\alpha_1}$, pour les divers cas qui ont été examinés, on remarquera que :

1° Dans tous les cas, pour $\frac{b}{d} = 0$, $\frac{\alpha_m}{\alpha_1} = 0$, c'est-à-dire quand les ouvertures sont très-éloignées par rapport à leurs dimensions, les amplitudes des harmoniques deviennent égales entre elles.

2° Dans cinq cas seulement, chaque harmonique devient nul pour certaines valeurs de $\frac{b}{d}$: c'est quand l'ébranlement est formé de la moitié d'un son pendulaire (*fig. 6*, p. 289); quand le fond de la boîte de la sirène porte des fentes étroites et le disque des entailles en forme de sinusoïde (*fig. 9*, p. 293), ou bien des ouvertures rectangulaires (*fig. 12*, p. 296), ou circulaires (*fig. 34*, p. 320), et enfin quand le fond de la boîte et le plateau portent tous deux des ouvertures rectangulaires (*fig. 17*, p. 300).

De plus, chaque harmonique devient nul un nombre de fois marqué par son rang diminué d'une unité.

3° Dans les autres cas, aucun harmonique ne devient nul, quel que soit l'écartement des ouvertures; mais l'amplitude de chacun passe par un certain nombre de maxima, marqué également par le rang de l'harmonique diminué d'une unité. Seulement les maxima et les minima deviennent de moins en moins différents, à mesure que le rang de l'harmonique est plus élevé.

4° Les harmoniques supérieurs ont l'intensité maxima dans le cas d'une ouverture rectangulaire et d'une fente étroite, et leur intensité minima dans le cas de deux losanges ou de deux triangles en sens inverse; quand il y a une ouverture de forme quelconque avec une fente étroite, les harmoniques sont toujours plus intenses qu'avec deux ouvertures de même forme.

5° Dans deux cas, les sons conservent le même timbre, si l'on remplace les vides par des pleins, et réciproquement : c'est quand le disque porte des ouvertures rectangulaires et le fond de la boîte des ouvertures de même forme ou des fentes étroites.

6° On remarque la plus grande analogie entre les figures dues à la moitié d'un son pendulaire et celles qui répondent au cas d'une fente étroite avec une ouverture circulaire; l'analogie est moindre pour une fente étroite et une ouverture rectangulaire. Les courbes figuratives du mouvement, demi-sinusoïde, demi-ellipse et rectangle, présentent en effet une certaine analogie générale de forme, surtout par leur mode de terminaison.

MODE D'ÉBRANLEMENT.		VALEUR DE $\frac{b}{d}$ DONNANT	
FOND DE LA BOÎTE MUNI DE	DISQUE MOBILE MUNI DE	le minimum du 2 ^e harmonique.	l'égalité de durée des deux périodes.
Fentes étroites.....	Entailles en demi-sinusoïdes.	0,75	0,716
Id.	Id. en sinusoïdes	1	1
Id.	Ouvertures rectangulaires..	0,5	0,5
Id.	Id. triangulaires...	0,62	1
Id.	Id. circulaires....	0,61	0,555
Ouvertures rectangulaires..	Ouvertures rectangulaires..	0,5	0,5
Id. en losanges....	Id. en losanges....	0,65	0,666...
Id. triangulaires...	Id. triangulaires...	0,60	de 0,5 à 0,75
Id. circulaires....	Id. circulaires....	0,58	0,588

7° De même il y a assez d'analogie entre le cas de deux ouvertures rectangulaires (*fig.* 17, p. 300), deux ouvertures en losanges (*fig.* 21, p. 307), deux ouvertures circulaires (*fig.* 36, p. 323), un triangle et fente étroite (*fig.* 26, p. 311), et deux triangles en sens contraire

(fig. 31, p. 315). Dans les courbes figuratives du mouvement, on trouve le plus souvent deux courbes ou deux droites coupant l'axe des x sous un angle variable, parfois nul, et présentant un point où il y a discontinuité dans la courbure (intersection de deux courbes ou droites).

8° Le minimum du deuxième harmonique a lieu, le plus souvent, quand le rapport de la largeur des ouvertures à leur écartement est compris entre 0,5 et 0,7, comme le montre le tableau précédent.

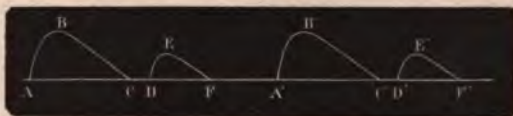
La condition pour que les deux périodes de l'ébranlement soient égales en durée, donnent pour $\frac{b}{d}$ des valeurs qui diffèrent peu des dernières, sauf dans le cas d'un triangle et d'une fente étroite. Dans le tableau : on a placé ces valeurs en regard des précédentes.

III. — Sons produits par deux ébranlements à des distances différentes.

I. Deux ébranlements de même nature. — Supposons que deux ébranlements différents, tous deux dans le même sens, se succèdent périodiquement; quelle sera la nature du son produit?

Soit $F(t)$ un des ébranlements représenté par la courbe ABC (fig. 38).

Fig. 38.



et $\varphi(t)$ le second, représenté par la courbe DEF, en prenant les origines des coordonnées en A et en D pour chacune de ces courbes; soient encore $\tau = AD$ l'intervalle des deux ébranlements, et $T = AA'$ la période du mouvement vibratoire. On a

$$F(t) = A_0 + \sum_1^{\infty} \left[\alpha_m \cos 2\pi \frac{m(t-p_m)}{T} \right] = A_0 + \sum_1^{\infty} \left(A_m \cos 2\pi \frac{mt}{T} + B_m \sin 2\pi \frac{mt}{T} \right),$$

$$\varphi(t) = A'_0 + \sum_1^{\infty} \left[\alpha'_m \cos 2\pi \frac{m(t-p'_m)}{T} \right] = A'_0 + \sum_1^{\infty} \left(A'_m \cos 2\pi \frac{mt}{T} + B'_m \sin 2\pi \frac{mt}{T} \right),$$

$$\varphi(t-\tau) = A'_0 + \sum_1^{\infty} \left[\alpha'_m \cos 2\pi \frac{m(t-p'_m-\tau)}{T} \right].$$

Soit $\psi(t)$ le mouvement résultant; on aura

$$\psi(t) = F(t) + \varphi(t - \tau) = A_0 + \sum \left[a_m \cos 2\pi \frac{m(t - \theta_m)}{T} \right]$$

avec

$$\alpha_m^2 = A_m^2 + B_m^2, \quad \alpha'_m{}^2 = A'_m{}^2 + B'_m{}^2;$$

d'où, en développant et en posant, pour abrégier, $\frac{2\pi m t}{T} = u$,

$$\varphi(t) = A_0 + A'_0 + \sum_1^\infty \left[\cos u \left(A_m + A'_m \cos \frac{2\pi m \tau}{T} - B'_m \sin \frac{2\pi m \tau}{T} \right) + \sin u \left(B_m + A'_m \sin \frac{2\pi m \tau}{T} + B'_m \cos \frac{2\pi m \tau}{T} \right) \right].$$

Par suite, on aura

$$(30) \quad \alpha_m^2 = \alpha_m^2 + \alpha'_m{}^2 + 2 \cos \frac{2\pi m \tau}{T} (A_m A'_m + B_m B'_m) + 2 \sin \frac{2\pi m \tau}{T} (B_m A'_m - A_m B'_m).$$

Si l'on admet que les deux ébranlements deviennent identiques (*fig. 39*), l'équation (30) donne

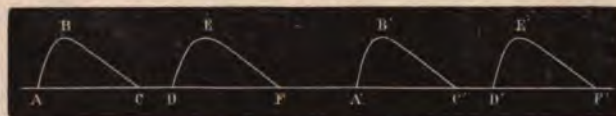
$$(31) \quad \alpha_m^2 = 4 \alpha_m^2 \cos^2 \frac{\pi m \tau}{T} \quad \text{ou} \quad \alpha_m = 2 \alpha_m \cos \frac{\pi m \tau}{T};$$

et l'on a

$$\psi(t) = 2 A_0 + \sum_1^\infty 2 \alpha_m \cos \frac{\pi m \tau}{T} \cos \frac{2\pi m \left(t - p_m - \frac{\tau}{2} \right)}{T}.$$

Discutons la valeur de α_m , et examinons les principaux cas qui peuvent se présenter, suivant les valeurs relatives de τ et de T . Il suffit de faire varier $\frac{\tau}{T}$ de 0 à $\frac{1}{2}$; car les valeurs $\frac{\tau}{T}$ et $1 - \frac{\tau}{T}$ donnent les mêmes valeurs absolues pour α_m , ce qu'on reconnaît, du reste, dans la *fig. 39*,

Fig. 39.



puisque ($AD = \tau$ et $DA' = T - \tau$) remplacer $\frac{\tau}{T}$ par $1 - \frac{\tau}{T}$ revient à dé-

placer l'origine de A en D, changement qui ne peut nullement influer sur la valeur des coefficients, ni sur la différence des phases.

1° Si $AD = \tau = 0$, chaque ébranlement est doublé; on obtient le même son avec une intensité quadruple.

A mesure que τ augmente, le son fondamental diminue, ainsi que les premiers harmoniques; seulement, comme ce terme, $\cos \frac{\pi m \tau}{T}$, varie d'autant plus rapidement que m est plus considérable, certains harmoniques disparaissent, puis deviennent plusieurs fois maxima.

2° Pour que l'on ait $a_m = 0$, il faut que $\frac{m\tau}{T}$ soit égal à $\frac{(2k+1)}{2}$, ou $\frac{\tau}{T} = \frac{2k+1}{2m}$; ce qui donne

$$\text{Pour } m = 1, \quad \frac{\tau}{T} = \frac{1}{2};$$

$$\text{Pour } m = 2, \quad \frac{\tau}{T} = \frac{1}{4};$$

$$\text{Pour } m = 3, \quad \frac{\tau}{T} = \frac{1}{6}, \frac{1}{2};$$

$$\text{Pour } m = 4, \quad \frac{\tau}{T} = \frac{1}{8}, \frac{3}{8};$$

$$\text{Pour } m = 5, \quad \frac{\tau}{T} = \frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{2};$$

et, en général,

$$\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2m}, \frac{3}{2m}, \frac{5}{2m}, \dots$$

Si m est pair, la dernière valeur est $\frac{m-1}{2m}$, et si m est impair, on obtient $\frac{1}{2}$.

3° Le coefficient de a_m passe par sa valeur maxima si l'on a $\frac{m\tau}{T} = k$ ou $\frac{\tau}{T} = \frac{k}{m}$; ce qui donne

$$\text{Pour } m = 1, \quad \frac{\tau}{T} = 0;$$

$$\text{Pour } m = 2, \quad \frac{\tau}{T} = 0, \frac{1}{2};$$

$$\text{Pour } m = 3, \quad \frac{\tau}{T} = 0, \frac{1}{3};$$

$$\text{Pour } m=4, \quad \frac{\tau}{T} = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2};$$

$$\text{Pour } m=5, \quad \frac{\tau}{T} = 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5};$$

et, en général,

$$\frac{\tau}{T} = 0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \dots$$

Si m est pair, la dernière valeur est $\frac{1}{2}$; si m est impair, c'est $\frac{m-1}{2m}$.

4° Pour $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2}$, on n'obtient que le son 2 avec ses harmoniques; les coefficients a_2, a_4, a_6, \dots sont exactement les mêmes que si, dans les formules fondamentales (3) qui donnent A_m et B_m , on remplaçait T par $\frac{T}{2}$; on obtient, en effet, de cette façon

$$A_m = 2 A_{2m}, \quad B_m = 2 B_{2m}.$$

En général si, dans les formules (3), on remplace T par $\frac{T}{p}$, on a

$$A_m = p A_{mp}, \quad B_m = p B_{mp} \quad \text{et} \quad a_m = p a_{mp}.$$

Donc, si dans la série de Fourier on considère les divers coefficients $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_m$, les coefficients $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2m}$ représentent les amplitudes relatives du son fondamental et des harmoniques, si l'intervalle des ouvertures devient moitié moindre; les coefficients $a_3, a_6, a_9, \dots, a_{3m}$, ceux qui sont relatifs au son obtenu si cet intervalle est trois fois moindre, et, en général, les coefficients $a_p, a_{2p}, a_{3p}, \dots, a_{mp}$, ceux qui conviennent au cas où cet intervalle devient p fois moindre.

Comme l'a fait remarquer Seebeck, on entendra donc plus ou moins le son fondamental, ou son octave aiguë, suivant que $\frac{\tau}{T}$ sera plus ou moins voisin de 1 ou de $\frac{1}{2}$. Si $\frac{\tau}{T}$ est voisin de $\frac{1}{2}$, sans avoir exactement cette valeur, les harmoniques pairs sont très-intenses et, par leur coexistence, donnent la sensation de l'octave du son fondamental; cependant il est facile de faire voir que l'on pourra encore entendre en même temps d'autres harmoniques impairs, car le rapport de leurs amplitudes à celle

du son fondamental est multiplié par le chiffre correspondant à leur rang; prenons, en effet, le rapport $\frac{a_m}{a_1}$; on a

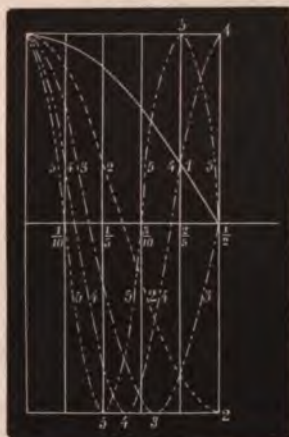
$$\frac{a_m}{a_1} = \frac{\alpha_m}{\alpha_1} \frac{\cos \pi m \frac{\tau}{T}}{\cos \frac{\pi \tau}{T}}.$$

Pour $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2}$, ce rapport est infini si m est pair, et égal à $\frac{\alpha_m}{\alpha_1}$ si m est impair.

Donc, quoique pour m impair a_m soit très-faible, on pourra entendre pour $\frac{\tau}{T}$, peu différent de $\frac{1}{2}$, avec l'octave aiguë, d'autres harmoniques impairs de préférence au son fondamental.

La *fig. 40*, où se trouvent construites les courbes $y = 2 \cos \frac{\pi \tau}{T}$,

Fig. 40.

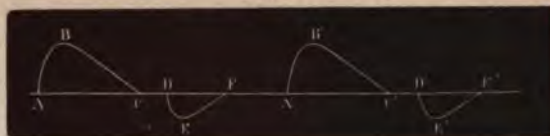


$2 \cos \frac{2 \pi \tau}{T}$, $2 \cos \frac{3 \pi \tau}{T}$, $2 \cos \frac{4 \pi \tau}{T}$, $2 \cos \frac{5 \pi \tau}{T}$, montre comment varie le coefficient de α_m pour les cinq premiers harmoniques, en faisant varier $\frac{\tau}{T}$ de 0 à $\frac{1}{2}$.

XI. *Deux ébranlements de sens contraires.* — Supposons que deux ébranlements de sens contraires se succèdent périodiquement; soient, comme précédemment, $F(t)$ et $\varphi(t)$ ces deux ébranlements (*fig. 41*);

en prenant les origines en A et D, si $\tau = AD$, l'intervalle des deux ébran-

Fig. 41.



lements, on aura, pour le mouvement résultant,

$$\begin{aligned}\psi(t) &= F(t) - \varphi(t - \tau) \\ &= A_0 - A'_0 + \sum_1^\infty \left[\cos u \left(A_m - A'_m \cos \frac{2\pi m \tau}{T} + B'_m \sin \frac{2\pi m \tau}{T} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sin u \left(B_m - A'_m \sin \frac{2\pi m \tau}{T} - B'_m \cos \frac{2\pi m \tau}{T} \right) \right],\end{aligned}$$

et

$$(32) \quad a_m^2 = \alpha_m^2 + \alpha'_m{}^2 - 2 \cos \frac{2\pi m \tau}{T} (A_m A'_m + B_m B'_m) + 2 \sin \frac{2\pi m \tau}{T} (A_m B'_m - B_m A'_m).$$

Si les deux ébranlements deviennent identiques, on aura

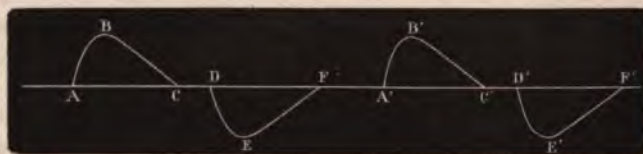
$$(33) \quad a_m^2 = 4\alpha_m^2 \sin^2 \frac{\pi m \tau}{T} \quad \text{ou} \quad a_m = 2\alpha_m \sin \frac{\pi m \tau}{T},$$

et

$$\psi(t) = \sum_1^\infty 2\alpha_m \sin \frac{\pi m \tau}{T} \cos 2\pi \frac{m \left(t - p_m - \frac{\tau}{2} + \frac{T}{4m} \right)}{T}.$$

Il suffira, pour discuter les valeurs de a_m , de faire varier $\frac{\tau}{T}$ de 0 à $\frac{1}{2}$, puisque remplacer $\frac{\tau}{T}$ par $1 - \frac{\tau}{T}$ revient à changer l'origine des coordonnées, de A en D, comme on le voit dans la *fig.* 42

Fig. 42.



1° Si $\frac{\tau}{T} = 0$, le son fondamental et tous les harmoniques sont nuls,

puisque les deux ébranlements se détruisent; de même pour $\frac{\tau}{T} = 1$.

2° A mesure que $\frac{\tau}{T}$ augmente, l'amplitude de tous les sons croît en même temps, mais celle des harmoniques supérieures d'autant plus rapidement que leur rang est plus élevé; en effet, l'on voit que le rapport $\frac{a_m}{a_1} = \frac{\alpha_m}{\alpha_1} \frac{\sin \pi m \frac{\tau}{T}}{\sin \pi \frac{\tau}{T}} = m \frac{\alpha_m}{\alpha_1}$ pour $\frac{\tau}{T} = 0$. Donc, à moins que α_m ne

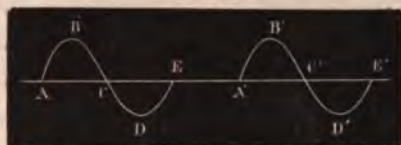
soit trop faible, on pourra entendre, si $\frac{\tau}{T}$ est peu différent de 0, les harmoniques supérieures de préférence au son fondamental.

3° Si $\frac{\tau}{T}$ est égal à la durée même de l'ébranlement, et si, de plus, chaque son est formé de la moitié d'un son pendulaire, on obtient l'effet produit par des sons pendulaires isolés les uns des autres par des intervalles de silence plus ou moins grands. En prenant pour α_m la valeur donnée par la relation (13), on obtient

$$a_m = \frac{8a \frac{\omega}{T}}{\pi \left(1 - 4m^2 \frac{\omega^2}{T^2}\right)} \cos \pi \frac{m\omega}{T} \sin \pi \frac{m\omega}{T} = \frac{4a \frac{\omega}{T}}{\pi \left(1 - 4m^2 \frac{\omega^2}{T^2}\right)} \sin 2\pi \frac{m\omega}{T}.$$

Or si, comme on le voit dans la *fig.* 43, on pose $2\omega = \omega'$, ω' étant

Fig. 43.



la durée AE totale du son pendulaire, on a pour a_m ,

$$(34) \quad a_m = \frac{2a \frac{\omega'}{T}}{\pi \left(1 - m^2 \frac{\omega'^2}{T^2}\right)} \sin \pi \frac{m\omega'}{T}.$$

Cette formule ne diffère que par le coefficient $\frac{2\omega'}{T}$ et l'absence du

coefficient $\frac{1}{m}$ de celle (15) qui correspond au cas déjà étudié du son produit par une sirène dont le disque porte sur le bord des entailles en forme de sinusoides. Si l'on étudie la forme des courbes

$$y = \frac{a_m}{a_1} = \frac{1 - \frac{\omega'^2}{T^2}}{1 - \frac{m^2 \omega'^2}{T^2}} \frac{\sin \pi \frac{m \omega'}{T}}{\sin \pi \frac{\omega'}{T}},$$

on reconnaît qu'elle diffère de celle des courbes de la *fig. 9* en ce que, pour la même valeur de $\frac{\omega'}{T}$, l'ordonnée est ici multipliée par m . Il en résulte donc que, pour $\frac{\omega'}{T} = 0$, on a $y = m$, au lieu d'avoir $y = 1$, et que les inflexions des courbes seront plus accentuées. Il est facile de comprendre, du reste, pourquoi les harmoniques sont ici plus intenses que dans le cas cité plus haut. Dans ce dernier cas, la courbe figurative du mouvement (*fig. 8*) est moins discontinue que dans le cas de sons pendulaires isolés les uns des autres (*fig. 43*), puisque ici $A_0 = 0$, et on ne peut, d'aucune façon, relier les ébranlements les uns aux autres.

Nous avons vu, au commencement de ce travail, que, si un son est formé par des ébranlements, tous de même nature et dirigés dans un seul sens, jamais l'amplitude des harmoniques ne peut dépasser celle du son fondamental, et tend à lui devenir tout au plus égale, quand la durée de l'ébranlement est infiniment petite par rapport à la durée de la vibration. Dans le cas précédent, au contraire, pour des sons pendulaires isolés et très-écartés les uns des autres, l'amplitude des harmoniques supérieurs devient m fois plus considérable que celle du son fondamental. Il est facile de généraliser ce principe et de démontrer qu'il en est de même quand l'ébranlement est quelconque, mais formé de deux parties où les mouvements et les condensations ont lieu en sens inverse; en effet, soit AE la durée totale de l'ébranlement (*fig. 43*); plaçons l'origine en C au milieu, on aura

$$A_0 = 0, \quad A_m = 0,$$

$$B_m = \frac{4}{d} \int_{-\frac{a}{2}}^0 F\left(\frac{x}{d}\right) \sin 2\pi \frac{mx}{d} dx.$$

Si l'on suppose d très-grand par rapport à a ,

$$B_m = \frac{8\pi m}{d^2} \int_{-\frac{a}{2}}^0 F\left(\frac{x}{d}\right) x dx, \quad B_1 = \frac{8\pi}{d^2} \int_{-\frac{a}{2}}^0 F\left(\frac{x}{d}\right) x dx,$$

et, par suite,

$$\frac{B_m}{B_1} = \frac{\alpha_m}{\alpha_1} = m.$$

Donc, si un son est produit par des ébranlements discontinus identiques, dirigés dans un seul sens, jamais les harmoniques supérieurs n'ont une amplitude supérieure à celle du son fondamental; elles tendent à devenir égales à celle de ce dernier son, quand la durée de l'ébranlement est infiniment petite par rapport à celle de la période vibratoire. Si chaque ébranlement, au contraire, est formé de deux parties de même durée, pendant lesquelles les condensations et les mouvements sont de sens contraire, l'amplitude du son m devient égale à m fois celle du son fondamental, pour un écartement infini des ébranlements. Il est évident que si cette seconde partie de chaque ébranlement diminue progressivement, cette amplitude de l'harmonique de rang m , égale d'abord à m fois celle du son fondamental, décroîtra progressivement jusqu'à l'égalité quand cette seconde partie de chaque ébranlement aura disparu.

On comprend ainsi pourquoi, dans certaines expériences, comme celle de la barre de Savart, les harmoniques supérieurs peuvent être assez intenses pour empêcher d'entendre complètement le son fondamental.

4° Revenons à la discussion de la formule (33).

Pour qu'un harmonique de rang m fasse défaut, il faut que l'on ait $\frac{\tau}{T} = \frac{k}{m}$, ce qui donne

$$\text{Pour } m = 2, \quad \frac{\tau}{T} = \frac{1}{2};$$

$$\text{Pour } m = 3, \quad \frac{\tau}{T} = \frac{1}{3};$$

$$\text{Pour } m = 4, \quad \frac{\tau}{T} = \frac{1}{4}, \frac{1}{2};$$

$$\text{Pour } m = 5, \quad \frac{\tau}{T} = \frac{1}{5}, \frac{2}{5};$$

et, en général, pour l'harmonique de rang m ,

$$\frac{\tau}{T} = \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \dots$$

jusqu'à $\frac{1}{2}$ si m est pair, ou $\frac{m-1}{2m}$ si m est impair.

Fig. 44.



5° Le coefficient de α_m sera maximum, au contraire, si l'on a $\frac{\tau}{T} = \frac{2k+1}{2m}$, ce qui donne

Pour $m = 2$, $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{4}$;

Pour $m = 3$, $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{6}, \frac{1}{2}$;

Pour $m = 4$, $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{8}, \frac{3}{8}$;

Pour $m = 5$, $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{2}$;

et, en général, pour l'harmonique de rang m ,

$$\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2m}, \frac{3}{2m}, \dots$$

jusqu'à $\frac{1}{2}$ si m est impair, et $\frac{m-1}{2m}$ si m est pair.

6° Si $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2}$, tous les harmoniques pairs disparaissent, et il ne reste que les harmoniques impairs, avec la même intensité relative que pour un seul ébranlement. Le son devra, pour son timbre, présenter une certaine analogie avec celui que produit une sirène munie d'ouvertures rectangulaires, quand l'écartement des ouvertures est égal à leur largeur.

On peut se rendre compte des variations des coefficients de α_m pour les cinq premiers harmoniques, en consultant la *fig. 44*.

IV. — Sons produits par trois ébranlements à des distances différentes.

I. *Trois ébranlements dans le même sens.* — Supposons que, dans la période T , se succèdent trois ébranlements identiques dans le même sens, mais inégalement distants; prenant l'origine en un instant quelconque de l'ébranlement médian, on pourra admettre que ces trois ébranlements seront représentés par $f(t)$, $f(t + \tau)$ et $f(t - \tau')$; si l'on a, en outre,

$$f(t) = \Lambda_0 + \sum_1^\infty \left[\alpha_m \cos 2\pi \frac{m(t - p_m)}{T} \right],$$

on pourra écrire

$$\psi(t) = f(t) + f(t + \tau) + f(t - \tau') = 3\Lambda_0 + \sum_1^\infty \left[a_m \cos 2\pi \frac{m(t - \theta_m)}{T} \right].$$

En développant, on arrive pour a_m à l'expression

$$(35) \quad a_m^2 = \alpha_m^2 \left(3 + 2 \cos 2\pi \frac{m\tau}{T} + 2 \cos 2\pi \frac{m\tau'}{T} + 2 \cos 2\pi \frac{m\tau''}{T} \right)$$

en posant $\tau'' = T - (\tau + \tau')$; dans cette formule n'entrent que les dis-

Fig. 45.



tances respectives des divers ébranlements, représentés d'une façon schématique par des points dans la *fig. 45*.

Les deux cas particuliers les plus intéressants à étudier sont ceux dans lesquels on suppose deux ébranlements équidistants, c'est-à-dire $\tau = \tau'$, et celui où l'on suppose deux ébranlements confondus, c'est-à-dire $\tau = 0$.

PREMIER CAS. *Deux ébranlements équidistants.* — La formule (35), en y faisant $\tau = \tau'$, $\tau'' = T - 2\tau$, devient

$$(36) \quad a_m = \alpha_m \left(1 + 2 \cos 2\pi \frac{m\tau}{T} \right).$$

Cette disposition est indiquée *fig. 46*; nécessairement on doit avoir

Fig. 46.



$\tau < \frac{T}{2}$; si $\tau = \frac{T}{2}$, on est ramené au cas suivant. On a ainsi (*)

$$\begin{aligned} a_m = 3 & \quad \text{pour } \frac{\tau}{T} = \frac{k}{m}, & a'_m = 1; \\ a_m = 2 & \quad \text{pour } \frac{\tau}{T} = \frac{6k \pm 1}{6m}, & a'_m = 0; \\ a_m = +1 & \quad \text{pour } \frac{\tau}{T} = \frac{4k \pm 1}{4m}, & a'_m = -1; \\ a_m = -1 & \quad \text{pour } \frac{\tau}{T} = \frac{2k + 1}{2m}, & a'_m = -3; \\ a_m = 0 & \quad \text{pour } \frac{\tau}{T} = \frac{3k \pm 1}{3m}, & a'_m = -2. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit le tableau suivant, en posant $m = 1, 2, 3, 4$:

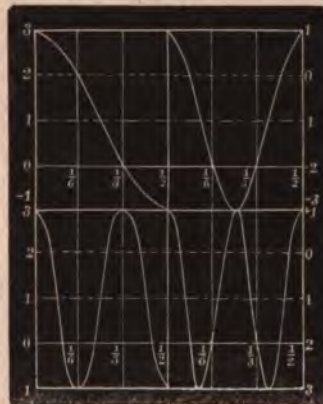
(*) On suppose que $\alpha_m = 1$.

m	VALEURS DE $\frac{\tau}{T}$ (*).				
	$a_m = 0,$ $a'_m = -2.$	$a_m = 1,$ $a'_m = -1.$	$a_m = -1,$ $a'_m = -3.$	$a_m = 2,$ $a'_m = 0.$	$a_m = 3,$ $a'_m = 1.$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0
2	$\frac{1}{6}, \frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}, \frac{5}{12}$	0, $\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}$	$\frac{1}{12}, \frac{1}{4}, \frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{18}, \frac{5}{18}, \frac{7}{18}$	0, $\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}$	$\frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \frac{7}{16}$	$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}$	$\frac{1}{24}, \frac{5}{24}, \frac{7}{24}, \frac{11}{24}$	0, $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$

(*) On suppose que $\alpha_m = 1$.

Les courbes correspondantes sont construites *fig. 47*. On peut remarquer que :

Fig. 47.



1° Si $\frac{\tau}{T} = 0$, tous les coefficients sont triplés : on entend le son correspondant à T avec une amplitude triple ;

2° Si $\frac{\tau}{T} = \frac{k}{m}$ (k étant plus petit que $\frac{m}{2}$), les sons $m, 2m, 3m, \dots$

sont triplés, et ce son devra être entendu séparément au milieu des harmoniques pourvu que m ne soit pas trop élevé;

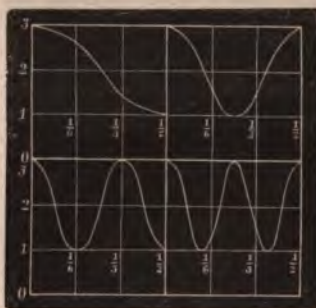
3° Si $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2}$, ce qui établit la coïncidence de deux ébranlements avec un ébranlement simple au milieu, tous les harmoniques pairs sont triplés; les harmoniques impairs restent avec la même valeur;

4° Si $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{3}$, le son 3 seul et ses harmoniques sont triplés, tous les autres sont nuls; on a ici, pour a_m , les mêmes valeurs qu'en remplaçant dans les formules fondamentales qui donnent α_m , T par $\frac{T}{3}$;

5° Si, partant de $\frac{\tau}{T} = 0$, on augmente cette quantité jusqu'à ce qu'elle soit égale à $\frac{1}{3}$, on ne peut pas dire avec Seebeck, que le troisième harmonique deviendra de plus en plus intense, car pour $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}$, il est nul, ainsi que tous les harmoniques dont les rangs sont des multiples de 3.

DEUXIÈME CAS. Deux ébranlements confondus et un séparé. — Si, dans

Fig. 48.



la formule (35), on fait $\tau = 0$, et que l'on remplace τ' par τ , on obtient

$$(37) \quad a_m^2 = \alpha_m^2 \left(5 + 4 \cos 2\pi \frac{m\tau}{T} \right).$$

1° a_m ne peut être nul, et varie seulement de 1 à 3.

2° On aura

$$a_m = 3, \quad \text{pour } \frac{\tau}{T} = \frac{k}{m};$$

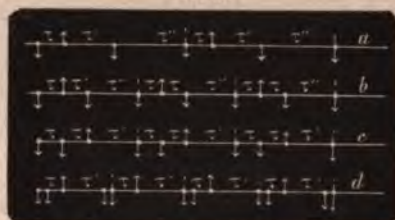
$$a_m = 1, \quad \text{pour } \frac{\tau}{T} = \frac{2k+1}{2m}.$$

La *fig. 48* donne les valeurs de a_m pour $m = 1, 2, 3, 4$.

3° Pour $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2}$, on retombe sur un cas déjà étudié précédemment.

II. *Deux ébranlements de même sens et le troisième de sens contraire.* — Nous supposons que l'ébranlement seul de sa nature contient l'origine du temps; comme on le représente *fig. 49a*; les ébranlements

Fig. 49.



successifs de la période T seront donc $-f(t)$, $+f(t + \tau)$ et $+f(t - \tau')$, ce qui conduit à la formule

$$(38) \quad a_m^2 = \alpha_m^2 \left(3 - 2 \cos 2\pi \frac{m\tau}{T} - 2 \cos 2\pi \frac{m\tau'}{T} + 2 \cos 2\pi \frac{m\tau''}{T} \right),$$

τ, τ', τ'' étant les intervalles des divers ébranlements; on voit que l'on met le signe $-$ devant le cosinus correspondant quand il y a changement de sens par rapport à l'ébranlement précédent, et le signe $+$ quand les ébranlements qui se succèdent sont de même sens.

Il y a trois cas particuliers à distinguer :

1° Si l'on a $\tau = \tau'$, c'est-à-dire si l'ébranlement seul de son espèce est à égale distance des deux autres (*fig. 49b*);

2° Si l'on a $\tau'' = \tau'$ quand l'ébranlement seul de son espèce n'est plus équidistant des deux autres (*fig. 49c*);

3° Si l'on a $\tau'' = 0$, c'est-à-dire si les deux ébranlements de même nature sont confondus (*fig. 49d*).

PREMIER CAS. — On a $\tau = \tau'$, l'ébranlement de sens contraire étant situé au milieu des deux autres. En faisant cette hypothèse, la formule (3) devient

$$(35) \quad a_m^2 = x_m^2 \left(1 - 2 \cos 2\pi \frac{m\tau}{T}\right)^2, \quad \text{d'où} \quad a_m = x_m \left(2 \cos 2\pi \frac{m\tau}{T} - 1\right).$$

On voit que si l'on construit les valeurs de a_m , on aura les mêmes courbes que celles qui correspondent à l'équation (36), en diminuant les ordonnées de 2. En représentant par a'_m les coefficients de la série de Fourier dans ce cas, le tableau donné (p. 338) conviendra également à ce cas, puisque l'on a constamment $a'_m = a_m - 2$.

La *fig. 47* lui convient également en déplaçant la ligne des abscisses d'une quantité égale à 2 du côté des ordonnées positives, comme le représente la ligne ponctuée, avec les chiffres placés à droite de la figure. On peut remarquer :

1° Que le son fondamental est nul pour $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{6}$; pour cette valeur, on a

$$a'_2 = 2x_2, \quad a'_3 = 3x_3, \quad a'_4 = 2x_4, \quad a'_5 = 0, \quad a'_6 = 3x_6, \quad a'_7 = 0, \quad a'_8 = 2x_8, \dots;$$

il ne reste que les harmoniques dont les rangs sont des multiples de 2 ou de 3; les harmoniques pairs sont doublés, les autres triplés; on devra donc entendre la quinte formée par les sons 2 et 3;

2° Si $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2}$, les deux ébranlements de même nature se confondent; on a

$$a'_1 = 3, \quad a'_2 = 1, \quad a'_3 = 3, \quad a'_4 = 1, \quad a'_5 = 3, \dots;$$

les harmoniques impairs sont triplés, les autres restent avec leur valeur primitive;

3° Si $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{3}$,

$$a'_1 = 2x_1, \quad a'_2 = 2x_2, \quad a'_3 = x_3, \quad a'_4 = 2x_4, \dots;$$

tous les harmoniques sont doublés, sauf les multiples de 3 qui conservent leur valeur primitive.

DEUXIÈME CAS. — On a $\tau = \tau'$, l'ébranlement de sens contraire n'é-

tant pas équidistant des deux autres. Si, dans la formule (38), on pose $\tau'' = \tau$, on obtient

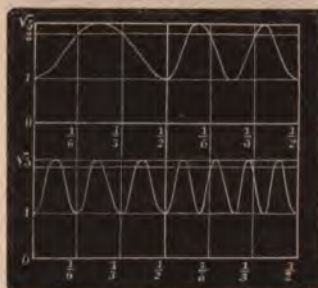
$$(40) \quad a_m^2 = \alpha_m^2 \left(1 + 4 \sin^2 2\pi \frac{m\tau}{T} \right) = \alpha_m^2 \left(5 - 4 \cos^2 2\pi \frac{m\tau}{T} \right).$$

Le coefficient de α_m varie entre 1 et $\sqrt{5}$ sans jamais être nul. On remarquera seulement que :

1° Pour $\frac{\tau}{T} = 0$ et $\frac{1}{2}$, on obtient le son fondamental avec ses harmoniques, ce qui était facile à prévoir;

2° Pour $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{4}$, les harmoniques impairs sont multipliés par $\sqrt{5}$, et les harmoniques pairs ne changent pas. La *fig. 50* donne les valeurs de a_m pour $m = 1, 2, 3, 4$.

Fig. 50.



TROISIÈME CAS. Deux ébranlements confondus, le troisième de sens contraire. — En faisant $\tau'' = 0$ dans la formule (38), et $\tau' = T - \tau$, on obtient

$$(41) \quad a_m^2 = \alpha_m^2 \left(5 - 4 \cos^2 2\pi \frac{m\tau}{T} \right).$$

Les courbes qui représentent le coefficient de α_m sont les mêmes que celles qui correspondent à la formule (39), mais prises dans une position symétrique, comme l'indique la *fig. 51*; ces coefficients varient du reste de 1 à 3, sans jamais devenir nuls.

1° Si $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2}$, on a

$$a_1 = 3\alpha_1, \quad a_2 = \alpha_2, \quad a_3 = 3\alpha_3, \quad a_4 = \alpha_4, \dots,$$

cas déjà examiné précédemment.

2° Si $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{4}$, on a

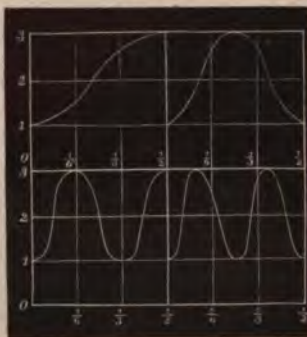
$$a_1 = \alpha_1 \sqrt{5}, \quad a_2 = 3\alpha_2, \quad a_3 = \alpha_3 \sqrt{5}, \quad a_4 = \alpha_4, \dots;$$

donc on devra entendre distinctement le second harmonique.

3° Si $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{6}$, on a

$$a_1 = \alpha_1 \sqrt{2}, \quad a_2 = \alpha_2 \sqrt{7}, \quad a_3 = 3\alpha_3, \quad a_4 = \alpha_4 \sqrt{7}, \dots$$

Fig. 51.



On devra, outre le son fondamental, distinguer les deux premiers harmoniques.

V. — Sons produits par un nombre quelconque d'ébranlements à diverses distances.

Supposons que, dans l'intervalle T , se trouve un nombre quelconque d'ébranlements de même nature. Représentons-les par

$$F(t - \theta_1), \quad F(t - \theta_2), \quad F(t - \theta_3), \dots, \quad F(t - \theta_q),$$

en laissant complètement arbitraire l'origine du temps; on a en outre

$$F(t) = \alpha_0 + \sum_i^\infty \left[\alpha_m \cos 2\pi \frac{m(t - p_m)}{T} \right] = \alpha_0 + \sum_i^\infty (\alpha_m \cos u),$$

en posant $\frac{2\pi m(t - p_m)}{T} = u$.

Soit $\varphi(t)$ le mouvement résultant, on aura

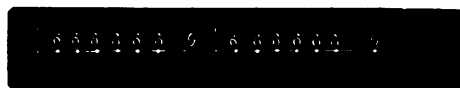
$$\varphi(t) = rA_0 + \sum_1^q F(t - \theta) = rA_0 + \sum_1^q \left[a_m \cos \left(u - \frac{2\pi m \varphi}{T} \right) \right].$$

Si tous les ébranlements ont lieu dans le même sens, $F(t - \theta)$ sera pris avec le signe +; s'il y en a dans les deux sens, on mettra le signe - devant $F(t - \theta)$ pour les ébranlements qui ont lieu en sens contraire. On obtient, en développant

$$(42) \begin{cases} a_m \cos 2\pi \frac{m \varphi}{T} = a_m \left(\cos 2\pi \frac{m \theta_1}{T} + \cos 2\pi \frac{m \theta_2}{T} + \dots + \cos 2\pi \frac{m \theta_q}{T} \right) = a_m S_1, \\ a_m \sin 2\pi \frac{m \varphi}{T} = a_m \left(\sin 2\pi \frac{m \theta_1}{T} + \sin 2\pi \frac{m \theta_2}{T} + \dots + \sin 2\pi \frac{m \theta_q}{T} \right) = a_m S_2, \\ a_m^2 = a_m^2 (S_1^2 + S_2^2). \end{cases}$$

La valeur de a_m est indépendante de l'ordre des ébranlements, pourvu qu'ils se succèdent assez rapidement; l'oreille, d'après les expériences de M. Helmholtz, n'entend en effet un son continu que quand il y a au moins 40 vibrations doubles par seconde, et même ne cesse complètement de percevoir les oscillations isolées que quand le nombre des vibrations atteint 100 par seconde. Le cas le plus intéressant à étudier est celui dans lequel les ébranlements sont tous de même sens et équidistants, au lieu d'être à des distances quelconques. Supposons

Fig. 52.



donc qu'il y ait q ébranlements équidistants dans l'intervalle T (fig. 52). Soit δ l'intervalle de deux ébranlements successifs, on aura

$$T = (q - 1)\delta + \theta.$$

Dans la formule (42), posons $\theta_1 = 0, \theta_2 = \delta, \theta_3 = 2\delta, \dots, \theta_q = (q - 1)\delta$, on aura

$$\begin{aligned} a_m \cos 2\pi \frac{m \varphi}{T} &= a_m \left(1 + \cos 2\pi \frac{m \delta}{T} + \dots + \cos 2\pi \frac{m(q-1)\delta}{T} \right), \\ a_m \sin 2\pi \frac{m \varphi}{T} &= a_m \left(\sin 2\pi \frac{m \delta}{T} + \dots + \sin 2\pi \frac{m(q-1)\delta}{T} \right). \end{aligned}$$

D'après une formule connue, on obtient

$$a_m \cos 2\pi \frac{m\varphi}{T} = \alpha_m \frac{\sin \pi \frac{mq\delta}{T} \cos \pi \frac{m(q-1)\delta}{T}}{\sin \pi \frac{m\delta}{T}},$$

$$a_m \sin 2\pi \frac{m\varphi}{T} = \alpha_m \frac{\sin \pi \frac{mq\delta}{T} \sin \pi \frac{m(q-1)\delta}{T}}{\sin \pi \frac{m\delta}{T}};$$

d'où enfin l'on déduit

$$(43) \quad a_m = \alpha_m \frac{\sin \pi \frac{mq\delta}{T}}{\sin \pi \frac{m\delta}{T}}.$$

1° Si $\delta = \frac{T}{q}$, on a $a_m = 0$, sauf pour $m = q$, où $a_m = q\alpha_m$; on obtient donc la même valeur pour a_m que si dans les formules fondamentales (3) on remplaçait T par $\frac{T}{q}$, comme on l'a déjà remarqué précédemment.

2° Supposons que l'on ait $\delta = \frac{T}{p}$, et qu'on prenne un certain nombre d'ébranlements $p - r = q$; alors on a

$$(44) \quad a_m = \alpha_m \frac{\sin \pi \frac{mq}{p}}{\sin \pi \frac{m}{p}} = \alpha_m \frac{\sin \pi \frac{m(p-r)}{p}}{\sin \pi \frac{m}{p}} = \pm \alpha_m \frac{\sin \pi \frac{mr}{p}}{\sin \pi \frac{m}{p}}.$$

On peut, à l'aide de cette formule, rendre compte des particularités de l'expérience qu'a faite Savart en enlevant successivement les dents d'une roue dentée (*). On voit que a_m a la même valeur, au signe près, si l'on remplace les dents enlevées par les dents subsistantes, sauf pour $m = p$, car alors $a_m = \alpha_m \times \frac{0}{0} = \alpha_m(p - r)$.

Le son fondamental obtenu, en ne laissant qu'une seule dent sur la

(*) Note sur la sensibilité de l'organe de l'ouïe (*Annales de Chimie et de Physique*, t. XLIV, p. 337).

roue (cas auquel se rapportent les valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p, \dots$) et tous les harmoniques, sauf ceux d'ordre $p, 2p, 3p, \dots$, ont la même valeur pour $q = \frac{p}{2} \pm t$.

Le son p et ses harmoniques $2p, 3p, 4p, \dots$, au contraire, ont une amplitude variable, suivant le nombre de dents enlevées, et d'autant plus considérable qu'on enlèvera moins de dents.

Dans l'expérience qu'il a faite, Savart employait une roue d'un grand nombre de dents tournant assez lentement; il ne s'est inquiété que du son p et non des autres; le son fondamental correspondant à une seule dent était du reste trop grave pour être perçu, puisqu'il dit que quand on ne laisse qu'une seule dent, au lieu du son p , on n'entend plus que le choc de la dent unique contre la carte employée. Il serait intéressant de reprendre ce travail, plutôt avec une sirène dont on fermerait diverses ouvertures sur les deux plateaux avec de la cire, et dans des conditions telles, que le son fondamental pût également être perceptible.

Examinons en détail les diverses phases de l'expérience, quand on remet successivement en place les diverses dents d'une roue dentée, munie d'un petit nombre de dents, et tournant assez vite pour que le son fondamental correspondant à une seule dent soit perceptible.

a. Si l'on ne laisse qu'une dent sur la roue, on entend un son, avec un grand nombre d'harmoniques, et soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_{2p}, \dots$ les amplitudes des sons simultanés.

Avec une roue dentée dans ces conditions, les harmoniques supérieurs ont une grande intensité, supérieure même à celle du son fondamental; car chaque ébranlement se compose de deux parties où les mouvements sont de sens contraires, et, comme ces premiers sont très-espacés, les harmoniques supérieurs peuvent être très-intenses relativement au son fondamental.

b. Supposons deux dents voisines conservées; on a $p - r = 2$, et l'on retombe sur un cas examiné dans la deuxième partie de ce travail; on trouve ainsi

$$\alpha_m = \alpha_m \frac{\sin 2\pi \frac{m}{p}}{\sin \pi \frac{m}{p}} = 2 \alpha_m \cos \pi \frac{m}{p}.$$

Les coefficients de la série de Fourier sont donc

$$2\alpha_1 \cos \frac{\pi}{p}, \quad 2\alpha_2 \cos \frac{2\pi}{p}, \quad 2\alpha_3 \cos \frac{3\pi}{p}, \dots,$$

$$2\alpha_{p-1} \cos \frac{\pi}{p}, \quad 2\alpha_p, \quad 2\alpha_{p+1} \cos \frac{\pi}{p}, \dots, \quad 2\alpha_{2p}, \dots$$

Les coefficients nuls sont ceux pour lesquels on a

$$m = \frac{p}{2}, \quad \frac{3p}{2}, \quad \frac{5p}{2}, \dots;$$

pour les coefficients maxima, on a

$$m = p, \quad 2p, \quad 3p, \dots$$

Le son α_p pourra donc être entendu, s'il n'est pas trop élevé, et si l'oreille est prévenue d'avance de son existence, comme dans l'expérience de Savart, qui a enlevé successivement les dents de la roue : en aurait-il été de même s'il eût suivi la marche inverse?

c. S'il y a trois dents sur la roue, on a

$$\alpha_m = \alpha_n \frac{\sin \pi \frac{3m}{p}}{\sin \pi \frac{m}{p}} = \alpha_n \left(3 - 4 \sin^2 \pi \frac{m}{p} \right) = \alpha_n \left(1 + 2 \cos 2\pi \frac{m}{p} \right),$$

formule déjà obtenue (36).

Les termes nuls seront donnés par les valeurs de $m = \frac{(3k \pm 1)p}{3}$. Si p est un multiple de 3, les coefficients nuls seront ceux dont les rangs sont $\frac{p}{3}, \frac{2p}{3}, \frac{4p}{3}, \frac{5p}{3}, \dots$; si p n'est pas un multiple de 3, les rangs des termes ayant des coefficients minima seront égaux au quotient entier du nombre $\frac{(3k \pm 1)p}{3}$, ou à ce quotient augmenté de 1.

Les termes dont les rangs sont $p, 2p, 3p, \dots$ seront triplés.

d. Supposons q dents à la roue,

$$\alpha_m = \alpha_n \frac{\sin \pi \frac{mq}{p}}{\sin \pi \frac{m}{p}}.$$

Pour les termes $a_q, a_{2q}, a_{3q}, \dots$, on a

$$a_q = q\alpha_q, \quad a_{2q} = q\alpha_{2q}, \quad a_{3q} = q\alpha_{3q}, \dots$$

Ce son devra donc être entendu très-distinctement si q est assez considérable. Si p est très-grand relativement à q , on a sensiblement

$$\sin \pi \frac{q}{p} = q \sin \frac{\pi}{p}.$$

Donc, si l'on ne conserve sur la roue qu'un petit nombre de dents, le son fondamental croît à peu près dans le même rapport que l'harmonique de rang p , cependant moins rapidement, puisqu'on a toujours $\sin \pi \frac{q}{p} < q \sin \frac{\pi}{p}$.

Le son fondamental $\alpha_1 \frac{\sin \pi \frac{q}{p}}{\sin \pi \frac{1}{p}}$ est maximum pour $\frac{\pi q}{p} = \frac{\pi}{2}$, ou $q = \frac{p}{2}$,

c'est-à-dire quand la moitié des dents est enlevée, l'autre existant au contraire. On peut, en effet, considérer dans ce cas la moitié des dents subsistantes comme produisant un seul ébranlement, la partie où les dents font défaut équivalant à la deuxième moitié de l'ébranlement.

Un terme quelconque est maximum si l'on a

$$q = \frac{(2k+1)p}{2m};$$

si le quotient n'est pas entier, il faudra prendre le quotient entier en moins, ou ce dernier augmenté de 1. On trouve ainsi que le maximum aura lieu

$$\text{Pour } m=2, \quad \text{si } q = \frac{p}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{3p}{4};$$

$$\text{Pour } m=3, \quad \text{si } q = \frac{p}{6}, \frac{p}{2}, \frac{5p}{6};$$

$$\text{Pour } m=4, \quad \text{si } q = \frac{p}{8}, \frac{3p}{8}, \frac{5p}{8}, \frac{7p}{8}.$$

Au contraire, pour que l'harmonique de rang m fasse défaut, il faut

que l'on ait $q = \frac{kp}{m}$, sauf si l'on a $m = p$, ce qui donne :

$$\text{Pour } m = 1, \quad q = p;$$

$$\text{Pour } m = 2, \quad q = \frac{p}{2};$$

$$\text{Pour } m = 3, \quad q = \frac{p}{3}, \frac{2p}{3};$$

$$\text{Pour } m = 4, \quad q = \frac{p}{4}, \frac{p}{2}, \frac{3p}{4}.$$

Si donc on a $q = \frac{p}{2}$, outre les sons $p, 2p, 3p, \dots$, dont les amplitudes sont multipliées par $\frac{p}{2}$, le son fondamental et les harmoniques impairs ont leur valeur maximum; les harmoniques pairs sont nuls.

Pour une valeur déterminée de q , les termes nuls correspondent à $m = \frac{kp}{q}$, sauf $k = q, 2q, 3q, \dots$. Les maxima ont lieu pour $m = p, 2p, 3p, \dots$. Enfin il y a des maxima relatifs moins considérables pour $k = \frac{(2k+1)q}{2p}$. On reconnaît une grande analogie, pour la discussion du moins, entre ces formules et celles qui sont relatives aux réseaux. Comme cas particulier qui peuvent se présenter, on remarquera que si p et q sont premiers entre eux, il n'y a que des minima sans qu'aucun terme soit complètement nul. Si p et q ne sont pas premiers, posons $\frac{p}{q} = \frac{p's}{q's}$, a_m sera nul pour $m = \frac{kp'}{q'}$, ou $k = q', 2q', 3q', \dots$, sauf sq' ou q , ce qui donne, pour m , les valeurs $p', 2p', 3p', \dots$. Si p est un multiple de q , $p = qs$, et a_m sera nul pour $m = s, 2s, 3s, \dots$, sauf pour $qs, 2qs, \dots$. Ohm avait déjà discuté, en partie du moins, les conséquences si variées de ce cas intéressant; on voit, par les résultats auxquels conduit la discussion de cette formule, combien il serait important de reprendre et de compléter l'expérience que Savart avait faite dans un but particulier. On voit, en outre, comment cette théorie rend compte des faits que Savart avait découverts, et qu'il était difficile d'expliquer sans le secours de la série de Fourier, et l'interprétation qu'en ont donnée Ohm et M. Helmholtz.

Une autre application intéressante de ces formules que j'indiquerai, c'est celle qui est relative à la sirène d'Opelt. Dans cette sirène, formée d'un simple disque de carton ou de métal, se trouvent, ainsi que je l'ai indiqué dans l'Introduction, plusieurs séries concentriques d'ouvertures présentant chacune une autre disposition. Dans les rangées extérieures, on a percé, le long d'une même circonférence, des ouvertures dont les distances au point de départ forment deux et même trois progressions arithmétiques; aux points communs à plusieurs séries, on ne place qu'une seule ouverture. En général, on entend plus ou moins distinctement l'accord correspondant au rapport des distances des ouvertures dans chaque série; ainsi, en supposant que l'on prenne les nombres 5 et 4, ce qui donne la disposition représentée *fig. 53a*,

Fig. 53.



on entend une tierce; avec la disposition de la *fig. 53b*, une quarte, et ainsi de suite.

Admettons que l'on ait pris, suivant la même circonférence, et dans un espace d correspondant au temps T d'une vibration, p ouvertures équidistantes, puis q , puis r, \dots (p, q, r, \dots sont supposés premiers entre eux), en partant d'une ouverture commune qui fait, par suite, partie de chacune de ces diverses séries, et en ne laissant qu'une ouverture aux points communs: quel sera l'effet produit? Nous avons vu que le son résultant est indépendant de l'ordre des ébranlements; on

aura donc, en appliquant les formules (42) à ce cas,

$$a_m \cos 2\pi \frac{m\varphi}{T} = \alpha_m \left\{ \begin{aligned} &1 + \cos 2\pi \frac{m}{p} + \cos 2\pi \frac{2m}{p} + \dots + \cos 2\pi \frac{(p-1)m}{p} \\ &+ \cos 2\pi \frac{m}{q} + \cos 2\pi \frac{2m}{q} + \dots + \cos 2\pi \frac{(q-1)m}{q} \\ &+ \cos 2\pi \frac{m}{r} + \cos 2\pi \frac{2m}{r} + \dots + \cos 2\pi \frac{(r-1)m}{r} \\ &+ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\},$$

$$a_m \sin 2\pi \frac{m\varphi}{T} = \alpha_m \left\{ \begin{aligned} &\sin 2\pi \frac{m}{p} + \sin 2\pi \frac{2m}{p} + \dots + \sin 2\pi \frac{(p-1)m}{p} \\ &+ \sin 2\pi \frac{m}{q} + \sin 2\pi \frac{2m}{q} + \dots + \sin 2\pi \frac{(q-1)m}{q} \\ &+ \sin 2\pi \frac{m}{r} + \sin 2\pi \frac{2m}{r} + \dots + \sin 2\pi \frac{(r-1)m}{r} \\ &+ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\}.$$

Or on sait que

$$\cos h + \cos 2h + \dots + \cos(n-1)h = \frac{\sin \frac{(n-1)h}{2} \cos \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}},$$

$$\sin h + \sin 2h + \dots + \sin(n-1)h = \frac{\sin \frac{(n-1)h}{2} \sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}}.$$

En appliquant ces formules au cas actuel, on a

$$a_m \cos 2\pi \frac{m\varphi}{T} = \alpha_m \left(1 + \frac{\sin \pi \frac{m(p-1)}{p} \cos m\pi}{\sin \pi \frac{m}{p}} + \frac{\sin \pi \frac{m(q-1)}{q} \cos m\pi}{\sin \pi \frac{m}{q}} + \frac{\sin \pi \frac{m(r-1)}{r} \cos m\pi + \dots}{\sin \pi \frac{m}{r}} \right);$$

$a_m \sin 2\pi \frac{m\varphi}{T}$ est nul, parce que chaque terme renferme $\sin m\pi$; donc

$$\varphi = 0.$$

Si m a une valeur quelconque autre que p, q, r, \dots , on reconnaît que chaque terme tel que $\frac{\sin \pi \frac{m(p-1)}{p} \cos m\pi}{\sin \pi \frac{m}{p}}$ devient égal à -1 ; on aura donc, si m est quelconque, mais non égal à p, q, r, \dots ,

$$a_m = (1 - 1 - 1 - 1 - 1 - \dots);$$

supposons que l'on ait S séries simultanées, on arrive à

$$(43) \quad a_m = -(S-1) a_m.$$

Si $m = p$, ce rapport des sinus correspondants prend la forme $\frac{0}{0}$, et se trouve être égal à $(p-1)$. Donc

$$(44) \quad \begin{cases} a_p = \alpha_p [1 + (p-1) - (S-1)] = \alpha_p (p - S + 1), \\ \text{et de même} \\ a_q = \alpha_q (q - S + 1), \\ a_r = \alpha_r (r - S + 1). \end{cases}$$

Voici les diverses combinaisons que présente la sirène d'Opelt (*fig. 53*) (*). Chaque circonférence concentrique renferme une première série de 24 ouvertures équidistantes; puis, la première, une série de 30 ouvertures; la deuxième une de 32; la troisième une de 36; la quatrième une de 40; la cinquième une de 42, en comptant deux fois chaque ouverture commune aux deux séries. La durée T du son fondamental sur chaque circonférence correspond à un nombre différent d'ouvertures; il est représenté par la fraction de la circonférence ayant pour numérateur l'unité, et pour dénominateur le commun diviseur des deux séries d'ouvertures, en comptant deux fois chaque ouverture commune. Le nombre total d'ouvertures est égal à la somme des ouvertures formant chaque série diminuée de ce même diviseur commun. En appliquant les formules (43) et (44), et représentant par ut ,

(*) On suppose les circonférences rectifiées.

le son correspondant à 24 ouvertures par circonférence, on arrive, pour l'intensité des divers harmoniques, aux résultats suivants :

Première circonférence. — 24 et 30 ouvertures; rapport 5:4.

$$\begin{array}{ccccccc} -\alpha_1, & -\alpha_2, & -\alpha_3, & +3\alpha_4, & +4\alpha_5, & -\alpha_6, & -\alpha_7, \dots; \\ ut_1, & ut_2, & sol_2, & ut_3, & mi_3, & sol_3. \end{array}$$

Deuxième circonférence. — 24 et 32 ouvertures; rapport 4:3.

$$\begin{array}{ccccccc} -\alpha_1, & -\alpha_2, & +2\alpha_3, & +3\alpha_4, & -\alpha_5, & -\alpha_6, \dots; \\ fa_1, & fa_2, & ut_3, & fa_3, & la_3, & ut_4, \dots \end{array}$$

Troisième circonférence. — 24 et 36 ouvertures; rapport 3:2.

$$\begin{array}{ccccccc} -\alpha_1, & +\alpha_2, & +2\alpha_3, & -\alpha_4, & -\alpha_5, \dots; \\ ut_2, & ut_3, & sol_3, & ut_4, & mi_4, \dots \end{array}$$

Quatrième circonférence. — 24 et 40 ouvertures; rapport 3:5.

$$\begin{array}{ccccccc} -\alpha_1, & -\alpha_2, & +2\alpha_3, & -\alpha_4, & +4\alpha_5, & -\alpha_6, \dots; \\ fa_1, & fa_2, & ut_3, & fa_3, & la_3, & ut_4, \dots \end{array}$$

Cinquième circonférence. — 24 et 42 ouvertures; rapport 4:7.

$$\begin{array}{ccccccc} -\alpha_1, & -\alpha_2, & -\alpha_3, & 3\alpha_4, & -\alpha_5, & -\alpha_6, & +6\alpha_7, -\alpha_8, \dots; \\ ut_1, & ut_2, & sol_2, & ut_3, & mi_3, & sol_3, & si^b_3, ut_4. \end{array}$$

On voit donc, en général, qu'avec la sirène d'Opelt, on devra entendre, outre le son fondamental, les deux harmoniques renforcés; dans un seul cas, que j'avais déjà eu occasion d'observer sans pouvoir m'en rendre compte, on n'entend pas l'accord correspondant au rapport des distances qui caractérisent chaque série: c'est quand ce rapport est égal à $\frac{2}{3}$, combinaison qui devrait produire une quinte. Or on voit, d'après les formules (43) et (44), que le coefficient du son α_2 est + 1 au lieu de - 1, ce qui ne constitue aucune différence pour l'audition. On peut donc entendre une douzième plus ou moins pure, mais non une quinte, ce que j'avais déjà constaté il y a longtemps, mais en attribuant la non-production de cet accord à un défaut de l'appareil employé. On peut résumer ces résultats dans le tableau suivant :

1	2	3	4	5	6	7	8
1	24	30	$\frac{1}{6}$	$30 + 24 - 6 = 48$	5 : 4	<i>ut</i> ₁	<i>ut</i> ₃ , <i>mi</i> ₃
2	24	32	$\frac{1}{8}$	$32 + 24 - 8 = 48$	4 : 3	<i>fa</i> ₁	<i>ut</i> ₃ , <i>fa</i> ₃
3	24	36	$\frac{1}{12}$	$36 + 24 - 12 = 48$	3 : 2	<i>ut</i> ₂	<i>sol</i> ₃
4	24	40	$\frac{1}{8}$	$40 + 24 - 8 = 56$	5 : 3	<i>fa</i> ₁	<i>ut</i> ₃ , <i>la</i> ₃
5	24	42	$\frac{1}{6}$	$42 + 24 - 6 = 60$	7 : 4	<i>ut</i> ₁	<i>ut</i> ₃ , <i>si</i> ^b ₃

- 1^{re} colonne. — Numéro de la circonférence.
 2^e » Nombre d'ouvertures de la première série.
 3^e » Nombre d'ouvertures de la deuxième série.
 4^e » Fraction de la circonférence donnant le son fondamental.
 5^e » Nombre total d'ouvertures.
 6^e » Rapport des distances dans les deux séries.
 7^e » Son fondamental.
 8^e » Harmoniques renforcés.

On peut remarquer que la valeur des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ n'est pas exactement la même pour chaque circonférence, puisque la distance des ouvertures est différente suivant le rayon de la circonférence à laquelle elles appartiennent.

Un résultat qui frappera, c'est que le son fondamental produit en même temps que les harmoniques n'est autre que le son appelé habituellement *son de combinaison*, ou bien ce dernier son est un des harmoniques du son fondamental. Si, dans la sirène d'Opelt, on faisait sortir l'air par une embouchure ayant la forme d'une fente étroite, et que l'on mit deux ouvertures au lieu d'une aux points communs aux deux séries, de manière à avoir un ébranlement double, les formules (49) démontrent que le son fondamental et ses harmoniques cesseraient de se produire complètement. On a en effet, dans ce cas, $\alpha_m = 0$, sauf pour les valeurs de m égales à p, q, r, \dots correspondant aux séries employées.

C'est ce qui devrait avoir lieu dans la sirène de Helmholtz, quand on laisse sortir l'air par deux rangées voisines à la fois. Mais, dans ce cas, surtout si les rangées sont prises sur le même disque, les sons de combinaison s'entendent directement; or, quand il y a coïncidence, c'est-à-dire quand les ouvertures sont ouvertes à la fois sur les deux rangées concentriques, on peut admettre que l'ébranlement produit n'est pas le double de ce qu'il serait si une rangée était ouverte toute seule, et, par conséquent, on se trouve ramené en partie au cas réalisé dans la sirène d'Opelt. Nul doute, par conséquent, que le son fondamental et ses harmoniques ne sortent plus énergiquement, en prenant la précaution de supprimer une des deux ouvertures placées sur le même rayon, et en fermant également un nombre convenable d'ouvertures sur le disque fixe. Avec des disques ainsi disposés qu'on pourrait substituer aux disques habituellement employés, on pourrait répéter dans de meilleures conditions les expériences d'Opelt. Il est difficile d'admettre que cette diminution d'intensité, au moment de l'ébranlement simultané de deux rangées, dans la sirène de Helmholtz, ne se produit pas. En effet, on sait que, si l'on monte sur un même sommier deux tuyaux d'orgue à l'unisson, l'air ne sort pas simultanément par les deux tuyaux, que les sons interfèrent, ce dont on peut s'assurer à l'aide des tuyaux à flammes de M. Kœnig.

Sans vouloir ici attaquer la théorie des sons de combinaison donnée il y a quelques années par M. Helmholtz, cependant on ne peut se refuser à admettre que, dans l'emploi de sa sirène et de tuyaux montés sur un même sommier, disposition que M. Helmholtz indique lui-même comme favorable à la production des sons de combinaison différentiels, ces derniers sons qu'on entend si facilement, pourraient être produits simplement par la même cause que celle qui donne, dans la sirène d'Opelt, naissance au son fondamental et à ses harmoniques, c'est-à-dire par une diminution d'intensité de l'ébranlement, quand il y a coïncidence. Jusqu'à quel point cette même cause intervient-elle dans toutes les circonstances où se produisent les sons de combinaison, c'est là une question très-importante et que je me propose d'examiner dans un autre travail.

Si dans la sirène d'Opelt ou de Helmholtz, on supprimait complètement les ouvertures communes aux deux séries, les formules (49)

deviendraient

$$a_m = -S\alpha_m, \text{ avec } m \text{ différent de } p, q, r, \dots,$$

$$a_p = (p - S)\alpha_p.$$

On augmente ainsi le son fondamental et ses harmoniques, et l'on diminue les sons renforcés précédemment. On arrive aux résultats suivants, avec les combinaisons signalées plus haut :

Première circonférence. — 24 et 30 ouvertures; rapport, 5 : 4.

$$\begin{array}{cccccc} -2\alpha_1, & -2\alpha_2, & -2\alpha_3, & +2\alpha_4, & +3\alpha_5, & -2\alpha_6, \dots; \\ ut_1, & ut_2, & sol_2, & ut_3, & mi_3, & sol_3, \dots \end{array}$$

Deuxième circonférence. — 24 et 32 ouvertures; rapport, 4 : 3.

$$\begin{array}{cccccc} -2\alpha_1, & -2\alpha_2, & +\alpha_3, & +2\alpha_4, & -2\alpha_5, & -2\alpha_6, \dots; \\ fa_1, & fa_2, & ut_3, & fa_3, & la_3, & ut_4, \dots \end{array}$$

Troisième circonférence. — 24 et 36 ouvertures; rapport, 3 : 2.

$$\begin{array}{cccc} -2\alpha_1, & +\alpha_2, & -2\alpha_3, & -2\alpha_4, \dots; \\ ut_2, & sol_2, & ut_3, & mi_3, \dots \end{array}$$

Quatrième circonférence. — 24 et 40 ouvertures; rapport, 3 : 5.

$$\begin{array}{cccccc} -2\alpha_1, & -2\alpha_2, & +\alpha_3, & -\alpha_4, & +3\alpha_5, & -2\alpha_6, \dots; \\ fa_1, & fa_2, & ut_3, & fa_3, & la_3, & ut_4, \dots \end{array}$$

Cinquième circonférence. — 24 et 42 ouvertures; rapport, 4 : 7.

$$\begin{array}{cccccccc} -2\alpha_1, & -2\alpha_2, & -2\alpha_3, & +2\alpha_4, & -2\alpha_5, & -2\alpha_6, & +5\alpha_7, & -2\alpha_8, \dots; \\ ut_1, & ut_2, & sol_2, & ut_3, & mi_3, & sol_3, & si^b_3, & ut_4, \dots \end{array}$$

On voit donc que l'on produit ainsi, dans la plupart des cas, uniquement le son fondamental et ses harmoniques, que jamais dans les combinaisons adoptées par Opelt il n'y a plus d'un harmonique renforcé, que l'autre ne change pas, est diminué, ou même disparaît complètement. En résumé, si dans une sirène on suppose que le long d'une circonférence se trouvent disposées des ouvertures formant deux séries différentes, on voit que :

1° Si on laisse subsister toutes les ouvertures communes aux deux séries, de telle sorte qu'aux points communs il y ait un ébranlement

double, on n'entendra que les sons correspondant aux deux séries séparées;

2° Si on ne laisse subsister qu'une ouverture aux points communs aux deux séries, on entend les mêmes sons que dans le cas précédent, et en outre le son fondamental, dont les sons dus aux deux séries sont les harmoniques, sauf dans le cas du rapport $\frac{2}{3}$, où le son 2 n'est pas renforcé;

3° Si l'on supprime complètement les ouvertures communes aux deux séries, le son fondamental avec ses harmoniques devient plus intense, un des deux sons correspondant à l'une des séries se confond avec ces derniers, se trouve même diminué ou annulé; le deuxième son peut aussi se confondre avec les autres harmoniques.

Les conséquences si simples, si nettes de la formule de Fourier, vérifiées par l'expérience, comme je me propose de le faire quand j'aurai les appareils convenables pour réaliser les nombreuses applications indiquées dans ce travail, serviront à la démonstration complète de la théorie de Ohm et de Fourier; car on voit ici, pour ainsi dire, les harmoniques, par leur coexistence, produire leur son fondamental.

Dans les quatre rangées extérieures de la sirène d'Opelt, se trouvent trois séries d'ouvertures à des distances différentes, et aux points communs à deux et trois séries, on n'a laissé subsister qu'une seule ouverture; si on les rétablissait toutes comme précédemment, on n'entendrait que les sons correspondant aux trois séries, évidemment comme si elles se trouvaient sur trois circonférences concentriques différentes. On peut varier encore les dispositions adoptées par Opelt, en supprimant d'abord toute ouverture commune à deux séries, et laissant subsister celle qui est commune à trois, puis supprimant complètement toutes les ouvertures communes. Dans les formules générales données plus haut (43) et (44), on admet implicitement que les nombres p, q, r, \dots sont premiers entre eux, et que les séries n'ont d'autres points communs que l'origine. Il en est rarement ainsi quand on cherche à obtenir les accords employés en musique; il faut alors retrancher de la somme totale les termes relatifs aux ouvertures supprimées aux points de rencontre des diverses séries, de 2 si l'on en prend 3, de 2 et de 3 si l'on en prend 4, etc. Je me contenterai de traiter ici les diverses dispositions

adoptées par Opelt ; quand j'aurai à m'occuper de la vérification expérimentale de ces formules, j'en ferai des applications plus variées.

Le tableau suivant indique les séries employées :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	48	40	32	$\frac{1}{8}$	24	32	40	4 : 5 : 6	fa_1
2	48	36	30	$\frac{1}{6}$	18	24	30	5 : 6 : 8	ut_1
3	48	64	80	$\frac{1}{16}$	32	32	48	3 : 4 : 5	fa_2
4	48	60	72	$\frac{1}{12}$	36	48	60	4 : 5 : 6	ut_2

- 1^{re} colonne. — Numéro de la circonférence.
 2^e » Nombre d'ouvertures de la première série.
 3^e » » de la deuxième série.
 4^e » » de la troisième série.
 5^e » Fraction de la circonférence donnant le son fondamental.
 6^e » Nombre total d'ouvertures supprimées en mettant une seule ouverture aux points communs à deux et à trois séries.
 7^e » *Idem* en mettant une ouverture aux points communs à trois séries et aucune aux points communs à deux.
 8^e » *Idem* en omettant complètement les ouvertures communes aux diverses séries.
 9^e » Rapport des distances dans les diverses séries.
 10^e » Son fondamental, en représentant par ut , le son correspondant à quarante-huit ouvertures.

Les formules à employer sont les mêmes que précédemment (43) et (44) ; seulement, comme il y a deux séries dont les distances sont égales à T divisé par des nombres pairs dans les circonférences 1 et 2 (la circonférence 4 donne le même résultat que la première, avec d'autres sons), il faut retrancher $\cos m\pi$ dans le cas relatif à la colonne 6, $2 \cos m\pi$ dans celui qui est relatif aux colonnes 8 et 9. Les formules à employer sont donc, dans le cas relatif à la colonne 6, réalisé par Opelt

(sauf pour le cas de la circonférence 3) :

$$(45) \quad a_m = \alpha_m \left[1 + \frac{\sin \pi \frac{m(p-1)}{p} \cos m\pi}{\sin \pi \frac{m}{p}} + \frac{\sin \pi \frac{m(q-1)}{q} \cos m\pi}{\sin \pi \frac{m}{q}} + \frac{\sin \pi \frac{m(r-1)}{r} \cos m\pi}{\sin \pi \frac{m}{r}} - \cos m\pi \right];$$

dans le cas relatif à la colonne 7 :

$$(46) \quad a_m = \alpha_m \left[1 + \frac{\sin \pi \frac{m(p-1)}{p} \cos m\pi}{\sin \pi \frac{m}{p}} + \frac{\sin \pi \frac{m(q-1)}{q} \cos m\pi}{\sin \pi \frac{m}{q}} + \frac{\sin \pi \frac{m(r-1)}{r} \cos m\pi}{\sin \pi \frac{m}{r}} - \cos m\pi \right];$$

et, dans le cas relatif à la colonne 8 :

$$(47) \quad a_m = \alpha_m \left[\frac{\sin \pi \frac{m(p-1)}{p}}{\sin \pi \frac{m}{p}} + \frac{\sin \pi \frac{m(q-1)}{q}}{\sin \pi \frac{m}{q}} + \frac{\sin \pi \frac{m(r-1)}{r}}{\sin \pi \frac{m}{r}} - 2 \right] \cos m\pi.$$

On en déduit les résultats suivants, en représentant par ut_1 le son correspondant à 48 ouvertures.

PREMIER CAS (6^e colonne). — On ne met qu'une ouverture aux points communs à deux et à trois séries. Les valeurs de a_m sont :

Première circonférence. Rapport des distances 4 : 5 : 6.

$$\begin{array}{cccccccc} -\alpha_1, & -3\alpha_2, & -\alpha_3, & +\alpha_4, & +4\alpha_5, & +3\alpha_6, & -\alpha_7, & -3\alpha_8, \dots; \\ fa_1, & fa_2, & ut_3, & fa_4, & la_5, & ut_6, & mi^b_7, & fa_8, \dots \end{array}$$

Deuxième circonférence. Rapport 5 : 6 : 8.

$$\begin{array}{cccccccccccc} -\alpha_1, & -3\alpha_2, & -\alpha_3, & -3\alpha_4, & +4\alpha_5, & +3\alpha_6, & -\alpha_7, & +5\alpha_8, & -\alpha_9, & -3\alpha_{10}, \dots; \\ ut_1, & ut_2, & sol_3, & ut_4, & mi_5, & sol_6, & si^b_7, & ut_8, & ré_9, & mi_{10}, \dots \end{array}$$

Troisième circonférence. Rapport 3 : 4 : 5.

$$\begin{array}{cccccccc} -2\alpha_1, & -2\alpha_2, & +\alpha_3, & +2\alpha_4, & +3\alpha_5, & -2\alpha_6, & -2\alpha_7, \dots; \\ fa_1, & fa_2, & ut_3, & fa_4, & la_5, & ut_6, & ré^b_7, \dots \end{array}$$

Quatrième circonférence. Rapport 4 : 5 : 6.

$$\begin{array}{cccccccc} -\alpha_1, & -3\alpha_2, & -\alpha_3, & +\alpha_4, & +4\alpha_5, & +3\alpha_6, & -\alpha_7, & -3\alpha_8, \dots; \\ ut_1, & ut_2, & sol_3, & ut_4, & mi_5, & sol_6, & si^b_7, & ut_8, \dots \end{array}$$

On voit que c'est en employant deux séries simultanées qui ont un diviseur commun qu'on obtient le plus grand nombre d'harmoniques renforcés, puisque l'amplitude des harmoniques pairs est multipliée par 3, en général, sauf ceux dont les rangs correspondent aux distances choisies pour les séries.

DEUXIÈME CAS. — On met une ouverture au point de rencontre des trois séries, et aucune à celui de deux séries.

Première circonférence. Rapport 4 : 5 : 6.

$$\begin{array}{ccccc} -4\alpha_2, & +5\alpha_3, & +2\alpha_6, & -4\alpha_8, & -4\alpha_{10}, \\ fa_2, & la_3, & ut_4, & fa_4, & la_4. \end{array}$$

Deuxième circonférence. Rapport 5 : 6 : 8.

$$\begin{array}{cccccc} -4\alpha_2, & -4\alpha_4, & +5\alpha_5, & +2\alpha_8, & -4\alpha_9, & -4\alpha_{10}, \\ ut_2, & ut_3, & mi_3, & sol_3, & ut_4, & mi_4. \end{array}$$

Quatrième circonférence. Rapport 4 : 5 : 6 (comme la première).

$$\begin{array}{ccccc} -4\alpha_2, & +5\alpha_3, & +2\alpha_6, & -4\alpha_8, & -4\alpha_{10}, \\ ut_2, & mi_3, & sol_4, & ut_4, & mi_4. \end{array}$$

TROISIÈME CAS. — On supprime toutes les ouvertures communes.

Première circonférence. Rapport 4 : 5 : 6.

$$\begin{array}{cccccccc} -\alpha_1, & -5\alpha_2, & -\alpha_3, & -\alpha_4, & +4\alpha_5, & +\alpha_6, & -\alpha_7, & -5\alpha_8, \\ fa_1, & fa_2, & ut_3, & fa_3, & la_3, & ut_4, & mi^b_4, & fa_4. \end{array}$$

Deuxième circonférence. Rapport 5 : 6 : 8.

$$\begin{array}{cccccccccc} -\alpha_1, & -5\alpha_2, & -\alpha_3, & -5\alpha_4, & +4\alpha_5, & +\alpha_6, & -\alpha_7, & +3\alpha_8, & -\alpha_9, & -5\alpha_{10}, \\ ut_1, & ut_2, & sol_2, & ut_3, & mi_3, & sol_3, & si^b_3, & ut_4, & ré_4, & mi_4. \end{array}$$

Troisième circonférence. Rapport 3 : 4 : 5.

$$\begin{array}{ccccccc} -3\alpha_1, & -3\alpha_2, & +\alpha_3, & +2\alpha_6, & -3\alpha_8, & -3\alpha_7, & -3\alpha_9, \dots \\ fa_2, & fa_3, & fa_4, & la_4, & ut_4, & mi^b_4, & fa_4. \end{array}$$

Quatrième circonférence. Rapport 4 : 5 : 6.

$$\begin{array}{ccccccc} -\alpha_1, & -5\alpha_2, & -\alpha_3, & -\alpha_4, & +4\alpha_5, & +\alpha_6, & -\alpha_7, & -5\alpha_8, \\ ut_2, & ut_3, & sol_3, & ut_4, & mi_4, & sol_4, & si^b_4, & ut_4. \end{array}$$

Ces résultats sont résumés dans le tableau suivant :

	1 ^{re} CIRCONF. — 4 : 5 : 6 18 40 32	2 ^e CIRCONF. — 5 : 6 : 8 18 36 30	3 ^e CIRCONF. — 3 : 4 : 5 18 64 80	4 ^e CIRCONF. — 4 : 5 : 6 18 60 72
1 ^{re} Disposition.	fa_1 fa_2, la_3, ut_4, fa_4	ut_1 $ut_2, ut_3, mi_3, sol_3, ut_4, mi_4$	fa_2 la_4	ut_2 ut_3, mi_4, sol_4, ut_5
2 ^e Disposition.	fa_2 la_3	ut_2 mi_3	fa_2 la_4	ut_3 mi_4
3 ^e Disposition.	fa_1 fa_2, la_3, fa_4	ut_1 $ut_2, ut_3, mi_3, ut_4, mi_4$	fa_2	ut_2 ut_3, mi_4, ut_5, mi_5

Le son ut_4 correspond au son produit par les quarante-huit ouvertures si elles étaient seules. La première note est le son fondamental ; celles de dessous indiquent les harmoniques renforcés. On voit encore ici qu'en ne prenant que les dispositions adoptées par Opelt, et qui pourraient être considérablement variées, surtout en choisissant des rapports plus compliqués, on obtient déjà des résultats assez nombreux pour que la vérification expérimentale puisse servir de critérium à cette théorie.

Conclusions.

Je vais tâcher de résumer, en terminant, les principaux résultats théoriques obtenus dans les diverses parties de ce travail.

1^o Quand un son est produit par une suite d'ébranlements isolés et équidistants, et que dans chacun d'eux le mouvement vibratoire n'a lieu que dans un seul sens, l'amplitude des harmoniques ne peut jamais dépasser celle du son fondamental, et ne peut lui devenir égale que si l'intervalle des ébranlements est infiniment grand par rapport à leur durée. Si les ébranlements ne sont plus équidistants, ou si chacun d'eux

est formé de deux parties pendant lesquelles les mouvements vibratoires sont de sens contraires, il n'en est plus de même. Si, en particulier, chaque ébranlement est formé de deux parties de même durée, pendant lesquelles les mouvements sont de sens contraires, et qu'ils soient infiniment éloignés, l'amplitude de l'harmonique de rang m devient égale à m fois celle du son fondamental.

2° Un son étant produit par un mouvement périodique quelconque, on peut toujours séparer l'impulsion communiquée à l'air en deux parties; d'abord en un déplacement réel, se propageant plus ou moins loin, puis un mouvement vibratoire formé de deux périodes pendant lesquelles les mouvements vibratoires sont de sens contraires, les condensations et dilatations totales étant égales, ces deux périodes pouvant du reste avoir des durées inégales.

3° Le son se rapproche, en général, autant que possible d'un son pendulaire, c'est-à-dire que le rapport de l'amplitude du deuxième harmonique à celle du son fondamental est minimum quand ces deux périodes dans lesquelles on peut diviser le mouvement vibratoire ont des durées égales. Si l'on prend, pour produire le son, une sirène munie d'ouvertures d'une forme quelconque, et que l'on fasse simplement varier la distance des ouvertures, il arrive que, dans quelques cas, chaque harmonique devient nul pour certaines distances, et l'on constate alors que chacun devient nul un nombre de fois marqué par son rang diminué d'une unité; si aucun ne passe par zéro, l'amplitude de chacun d'eux passe par un certain nombre de minima marqué par son rang diminué d'une unité,

4° Dans la série de Fourier, les coefficients des divers termes étant $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m$, si l'intervalle qui sépare les ébranlements devient p fois moindre, les coefficients relatifs à la nouvelle série seront

$$p\alpha_p, p\alpha_{2p}, p\alpha_{3p}, \dots, p\alpha_{mp}.$$

5° Par la théorie de Ohm, on peut expliquer tous les faits observés par Seebeck, relatifs à la production de sons par des ébranlements qui ne sont plus équidistants. Il serait nécessaire de reprendre complètement les expériences de Seebeck, en étudiant, avec des résonnateurs, les sons obtenus. Les résultats qu'on déduit de la série de Fourier sont plus complets que ceux qu'avait observés Seebeck.

6° La théorie de Ohm, sur l'interprétation de la série de Fourier, rend compte de l'expérience qu'à réalisée Savart, en enlevant successivement les dents d'une roue jusqu'à ce qu'il n'en restât plus que deux, et dans laquelle il a constaté que l'on continuait à entendre le même son, quel que fût le nombre des dents; on reconnaît qu'il se produit, en même temps, d'autres sons dont l'intensité dépend du nombre des dents laissées sur la roue, et dont l'existence n'avait pas été signalée.

7° Si l'on prend une sirène et que l'on perce, sur des circonférences voisines, plusieurs rangées d'ouvertures, à des distances variables, comme l'ont fait MM. Dove et Helmholtz, on peut obtenir des accords doubles et triples. On entend facilement les sons de combinaisons soustractifs et additifs, ces derniers plus facilement (*). Si l'on supprime une des ouvertures situées sur le même rayon, d'autres sons prennent naissance, qui rentrent dans les sons de combinaisons soit de premier ordre, soit d'ordres supérieurs. En supprimant ainsi, soit partiellement, soit en totalité, les ouvertures qui se correspondent sur les circonférences concentriques, on obtient, par la théorie, des résultats très-variés relativement aux sons qui doivent se produire; certains sons, dus aux séries primitives au contraire, sont affaiblis ou annulés.

Les mêmes résultats sont obtenus avec la sirène d'Opelt, dans laquelle les diverses séries d'ouvertures sont situées sur la même circonférence, au lieu d'être placées sur des circonférences voisines, ce qui revient à peu près au même, quant aux sons accessoires produits. Enfin, en admettant que, dans la sirène de Dove et de Helmholtz (**), lorsque deux ou trois ouvertures sont ouvertes à la fois, l'ébranlement n'est pas le double ou le triple de ce qu'il serait si elles étaient ouvertes séparément, on arrive ainsi à cette conclusion que, dans la plupart des cas, les sons de combinaison si énergiques que l'on entend peuvent être attribués à la même cause que celle qui les produit dans la sirène d'Opelt, c'est-à-dire à ce que, au moment de la coïncidence, l'ébranle-

(*) Il est également nécessaire de supprimer un certain nombre d'ouvertures du plateau fixe.

(**) Dans la sirène de M. Helmholtz, les ouvertures étant très-grandes relativement à leur distance, il y a plusieurs ouvertures ouvertes, même quand la coïncidence n'existe pas, ce qui diminue l'effet indiqué.

ment total n'est pas égal à la somme des ébranlements partiels, et cela uniquement à cause de la disposition des appareils employés; c'est, en effet, en prenant deux tuyaux sonores, montés sur la même soufflerie, que l'on produit le plus énergiquement les sons de combinaison.

Ces résultats ne pourront toutefois être complètement admis que quand ils auront reçu la sanction de l'expérience, ce qui exige des appareils nombreux et convenablement disposés pour l'étude des sons produits; ce qu'il faut surtout chercher à réaliser, c'est une sirène ayant un mouvement de rotation parfaitement régulier, et produisant des sons purs et intenses; on pourrait employer utilement, dans ce but, les nouveaux régulateurs imaginés par Foucault pour obtenir des mouvements de rotation parfaitement réguliers et continus. Je me propose d'entreprendre cette étude expérimentale, complément du présent travail, quand les circonstances m'auront permis de me procurer les appareils nécessaires pour pouvoir la faire dans de bonnes conditions d'exactitude et de précision.

FIN DU TOME SEPTIÈME ET DE LA 1^{re} SÉRIE.

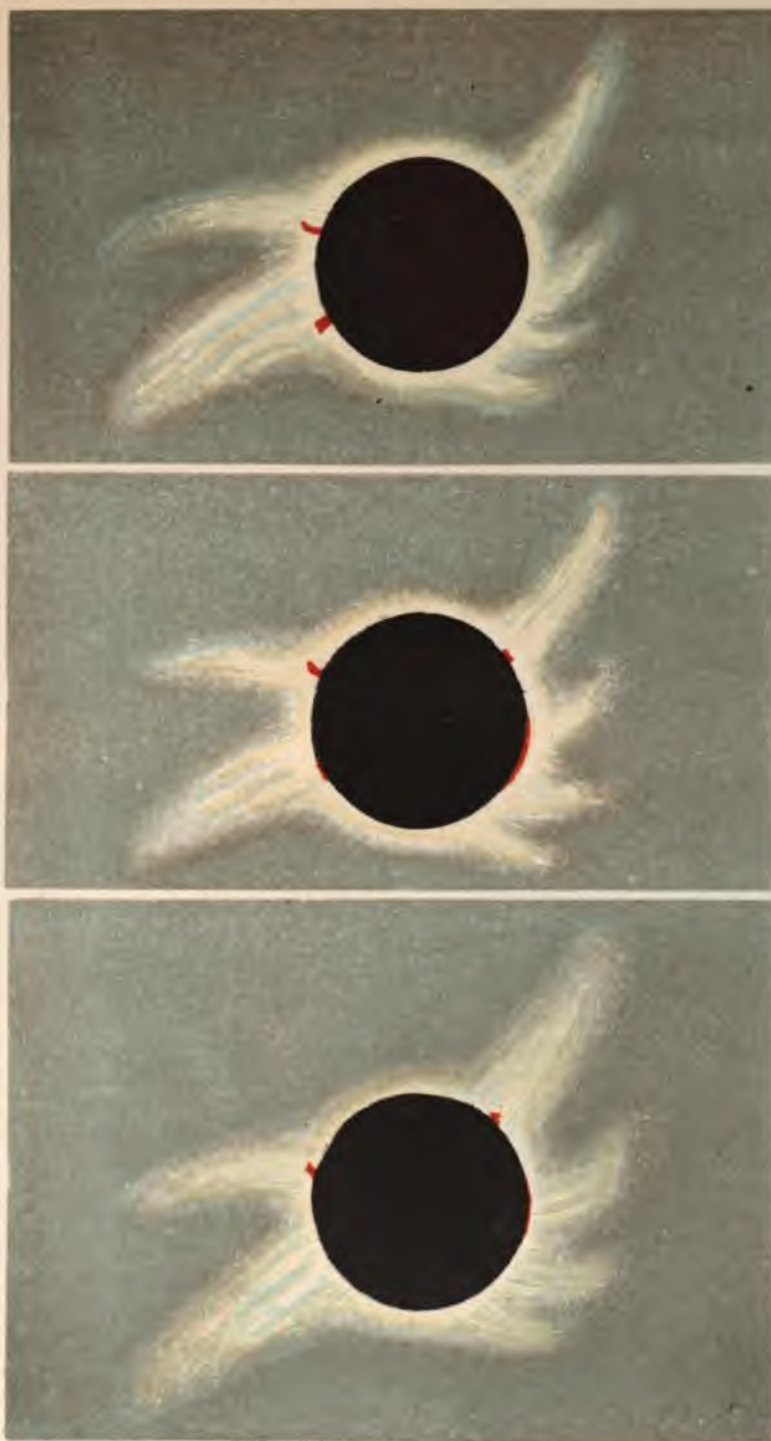
TABLE DES MATIÈRES

DU TOME SEPTIÈME.

	Pages.
Intégration des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction, par <i>M. Collet</i> , Docteur ès Sciences.....	7
Du facteur intégrant pour les expressions différentielles du premier ordre renfermant un nombre quelconque de variables indépendantes, par <i>M. Collet</i> , Docteur ès Sciences.....	59
Sur une intégrale double, par <i>M. Didon</i> , Professeur à la Faculté des Sciences de Rennes.	89
Note sur la rotation des corps solides, par <i>M. R. Radou</i>	97
Voyage de la Commission française envoyée par le Ministre de l'Instruction publique sur la côte orientale de la presqu'île de Malacca, pour y observer l'éclipse totale de Soleil du 18 août 1868, par <i>M. Stephan</i> , Directeur de l'Observatoire de Marseille...	99
Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre, par <i>M. G. Darboux</i> , ancien Élève de l'École Normale, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Louis-le-Grand.....	163
Sur une série de lignes analogues aux lignes géodésiques, par <i>M. G. Darboux</i> , ancien Élève de l'École Normale, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Louis-le-Grand.....	175
Étude expérimentale de l'attraction exercée par une bobine sur un barreau de fer doux, par <i>M. L. Saint-Loup</i> , Professeur à la Faculté des Sciences de Strasbourg.....	181
Recherches sur la flexion de la Lunette méridienne, par <i>M. L.-J. Gruy</i> , Professeur au Lycée de Clermont-Ferrand.....	211
Développements sur certaines séries de polynômes à un nombre quelconque de variables, par <i>M. F. Didon</i> , Chargé de cours à la Faculté des Sciences de Rennes.....	247
Étude sur le timbre des sons produits par des chocs discontinus et en particulier par la sirène, par <i>M. A. Terquem</i> , Professeur à la Faculté des Sciences de Strasbourg.	269

PLANCHES.

- Pl. I.* — Carte de la zone totale de l'éclipse de Soleil du 17-18 août 1868, depuis Aden jusqu'à la côte occidentale de Bornéo.
- Pl. II.* — Vues de l'éclipse de Soleil, d'après les croquis de MM. Olry et Bordes, et les mesures de M. Stephan.
- Pl. III.* — Dessins originaux de MM. Olry et Bordes.
-

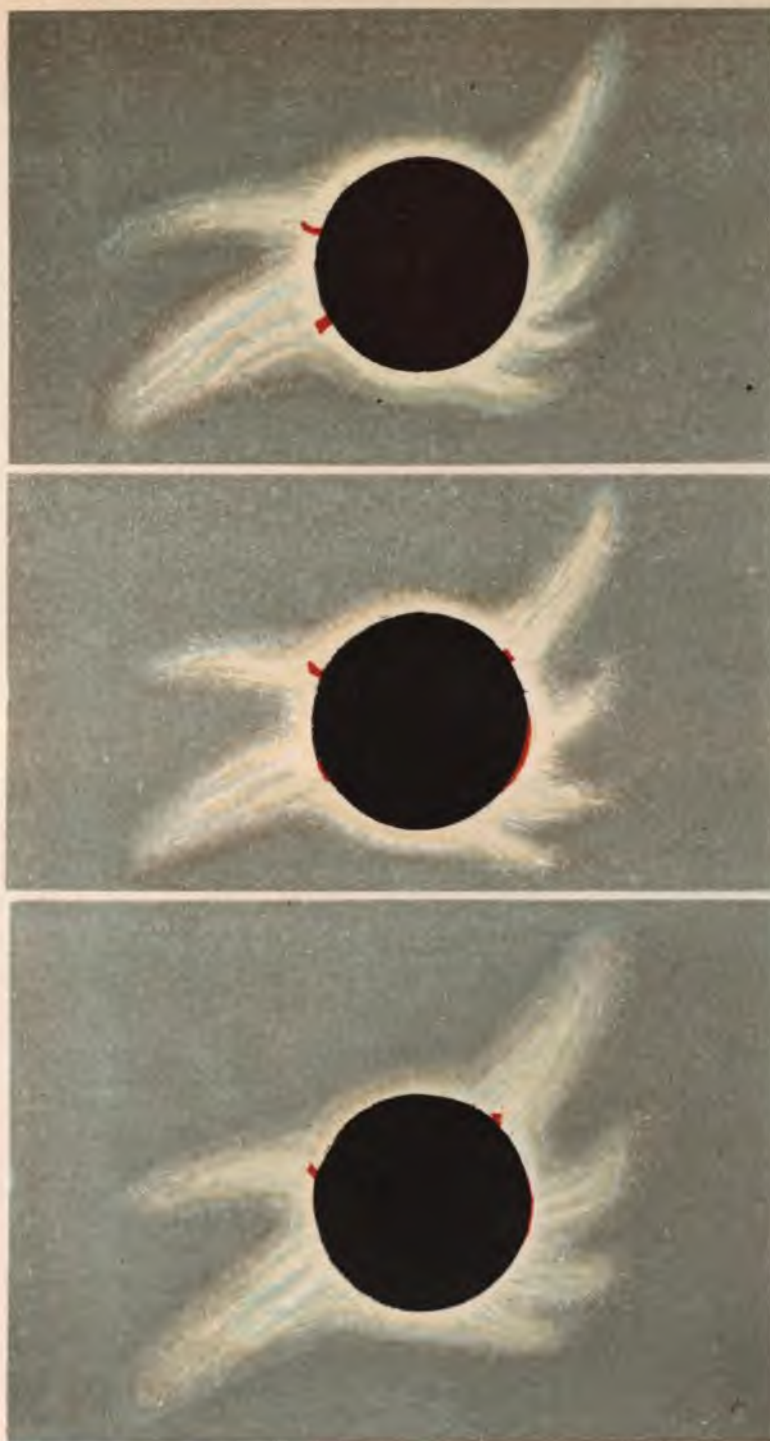


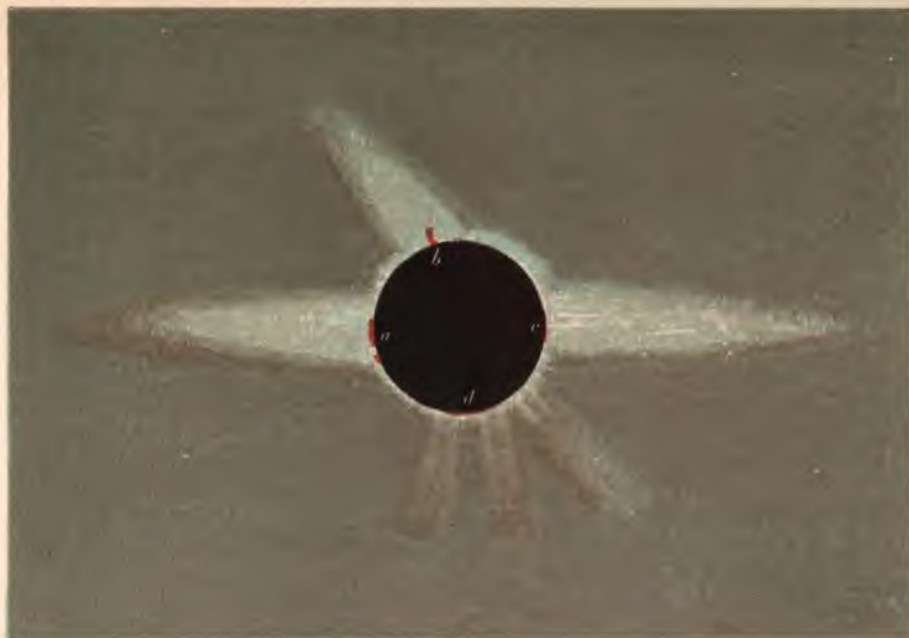


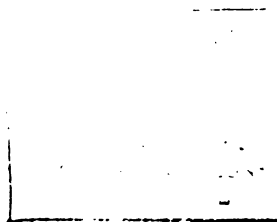
11

12

13







20.
EP

